Решения заданий 10 класса

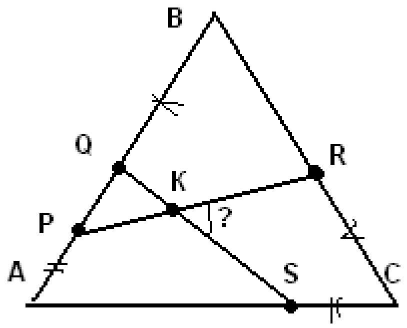
10.1. Пусть a,b,c - не обязательно различные натуральные числа такие, что дроби $\frac{a+b}{c},\frac{a+c}{b},\frac{b+c}{a}$ тоже являются натуральными числами. Найти все возможные значения суммы $\frac{a+b}{c}+\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a}$.

Ответ. 6, 7 или 8.

Решение. Ввиду симметрии можно считать, что $a \le b \le c$. Тогда $a+b \le 2c$, поэтому целочисленность дроби $\frac{a+b}{c}$ влечёт $a+b=2c$ или $a+b=c$. В первом случае $a=b=c$ и сумма трёх дробей из условия равна 6. Пусть далее $a+b=c$. Из целочисленности дроби $\frac{a+c}{b}$ следует, что $2a$ делится на b, откуда либо $a=b$, и тогда $c=2a$, либо $2a=b$ и тогда $c=3a$. В первом из этих случаев сумма трёх дробей из условия равна 7, а во втором 8.

Критерии проверки. Получены ограничения $a+b=2c$ или $a+b=c$: по 1 баллу за каждое. Приведены примеры a,b,c для одного-двух из ответов 6, 7 или 8: 1 балл, а если для всех трёх ответов: 2 балла.

10.2. На сторонах AB, BC, AC равностороннего треугольника ABC отмечены точки P и Q, R,S соответственно, такие, что AP=CS, BQ=CR. Доказать, что угол между отрезками PR и QS равен 60 градусов.



Доказательство. Ввиду того, что AP=CS, BQ=CR, имеем BP=AB-AP=AC- CS= AS и BR=BC- CR=AB- BQ= AQ. Следовательно, треугольники AQS и BRP равны по парам равных сторон BP=AS, BR=AQ и углам между ними. Обозначим точку пересечения отрезков PR и QS за K. Тогда величина угла KPA равна 180 градусов минус величина BPR = 180 градусов минус величина KSA, то есть сумма углов KPA и KSA равна 180 градусов. Следовательно, сумма углов PAS и PKS тоже равна 180 градусов, то есть угол PKS равен 120 градусов. Отсюда угол RKS между отрезками PR и QS равен 180-120=60 градусам, что и требовалось доказать.

Критерии проверки. Доказано, что треугольники AQS и BRP равны: 3 балла.

10.3. Найти минимальное и максимальное значения выражения $3x^2y-2xy^2$, где x,y принимают произвольные значения из интервала $[0,1]$

Ответ. $-\frac{1}{3}$ и $\frac{9}{8}$

Решение 1. Положим $f(x,y)=3x^2y-2xy^2$, тогда $f(x,y)=xy(3x-2y)$. Полученное выражение равно 0 при $x=0$, или $y=0$, или $y=\frac{3}{2}x$. Следовательно, в области $0\le x,y\le 1$ функция $f(x,y)$ положительна ниже (или правее) прямой $y=\frac{3}{2}x$ и тут достигается её максимум, и отрицательна – выше (или левее) этой прямой и тут достигается её минимум. В первом случае, ввиду неравенства $x\le 1$ и положительности выражения в скобках получим $f(x,y)=xy(3x-2y)\le y(3-2y)=3y-2y^2$. Максимум этого квадратного трёхчлена достигается при $y=\frac{3}{4}$, $x=1$ и равен $\frac{9}{8}$, что даёт максимальное значение выражения из условия.

Во втором случае, ввиду неравенства $y\le 1$ и отрицательности выражения в скобках получим $f(x,y)=xy(3x-2y)\ge x(3x-2)=3x^2-2x$. Минимум этого квадратного трёхчлена достигается при $x=\frac{1}{3}, y=1$ и равен $-\frac{1}{3}$, что даёт минимальное значение выражения из условия.

Решение 2. Считаем переменную y параметром, лежащим в интервале $[0,1]$. При каждом фиксированном $y\in[0,1]$ квадратный трёхчлен $f(x)=3yx^2-2y^2x$ принимает минимальное значение, равное $-\frac{y^3}{3}$, при $x=-\frac{-2y^2}{2\cdot 3y}=\frac{y}{3}\in[0,1]$ следовательно, минимальное значение всего выражения достигается при $y=1, x=\frac{1}{3}$ и равен $-\frac{1}{3}$. Максимум же квадратного трёхчлена $f(x)=3yx^2-2y^2x$ при каждом фиксированном $y\in[0,1]$ на интервале $[0,1]$ достигается на его конце при $x=1$(значение на другом конце $x=0$ равно 0), и равен $3y-2y^2$. Следовательно, максимум $f(x)$ не превосходит максимума трёхчлена $3y-2y^2$, который достигается при $y=\frac{3}{4}$ из интервале $[0,1]$ и $x=1$, и равен $\frac{9}{8}$.

Критерии проверки. Доказана одна из оценок $-\frac{1}{3}$ и $\frac{9}{8}$: 3 балла.

10.4. На доске 10 на 10 часть клеток отмечена, причём никакие три отмеченные клетки не образуют уголок. Доказать, что доску можно разбить на домино из двух соседних по стороне клеток, содержащие не более одной отмеченной клетки каждое.

Доказательство. Разобьём доску 10 на 10 на квадратики 2 на 2 клетки. Ввиду того, что никакие три отмеченные клетки не образуют трёхклеточный уголок, каждый такой квадратик содержит не более двух отмеченных клеток. Если две отмеченные в нём клетки - соседние по стороне, то разобьём его на два домино линией сетки, содержащей эту сторону. В случаях, когда в квадратике отмеченные клетки не соседние, или их не больше одной, разбиваем его на домино произвольным способом, скажем, на горизонтальные. Разбив указанным образом каждый квадратик, получим разбиение доски 10 на 10 на домино, с одержащие не более одной отмеченной клетки каждое.

Критерии проверки. Замечено, что каждый квадратик 2 на 2 содержит не более двух отмеченных клеток. 3 балла.

10.5. Представить число 1000 в виде суммы максимально возможного количества натуральных чисел, суммы цифр которых попарно различны.

Ответ. 19.

Решение. Заметим, что минимальное натуральное число с суммой цифр А равно $a99\ldots99$, где первая цифра - остаток, а количество девяток в записи - неполное частное от деления А на 9. Отсюда следует что, если А меньше В, то и минимальное число с суммой цифр А меньше, чем минимальное число с суммой цифр В. Рассмотрим наименьшие натуральные числа с суммами цифр 1,2,3,…,19, 20, они равны соответственно $a_1=1, a_2=2,\ldots,a_9=9, a_{10}=19, a_{11}=29,\ldots,a_{18}=99, a_{19}=199, a_{20}=299$. Сумма первых 19 из них равна 775, а остаток от деления её на 9 равен 1. как и остаток от деления 1000 на 9. Увеличим эту сумму на 225, взяв вместо 9 число 234 с той же суммой цифр и получим представление 1000 в виде суммы 19 чисел 1,2,3,4,5,6,7,8,19,29,39,49,59,69,79,89,99,199,234 с различными суммами цифр от 1 до 19.

Предположим, что 1000 можно представить в виде суммы $n \geq 20$ натуральных чисел $b_1, b_2,\ldots,b_n$ с различными суммами цифр $s(b_1)<s(b_2)<\ldots<s(b_n)$. В таком случае, $s(b_k)\geq k, k=1,2,\ldots,n$, и, следовательно, $b_k \geq a_k, k=1,2,\ldots,n$. Значит, $1000=b_1+b_2+\ldots+b_n \geq a_1+a_2+\ldots+a_n \geq a_1+a_2+\ldots+a_{20}=1074$ – противоречие.

Критерии проверки. Найдено представление 1000 в виде суммы 19 чисел с различными суммами цифр: 3 балла. Доказательство максимальности 19: 4 балла.