Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике
Заключительный этап **2018-2019 г.г.**
10 класс ***Каждая задача оценивается в 7 баллов***

10.1. Прямые l и m пересекают ось ОХ в различных точках, симметричных друг другу относительно начала координат, и параболу $y=x^2$ в точках $(a,a^2),(b,b^2)$ и $(c,c^2),(d,d^2)$ соответственно. Доказать, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=0$.

10.2. Множество А содержит 15 различных натуральных чисел, не превосходящих 100, одно из которых равно 84, и обладает следующим свойством: модуль разности любых двух различных чисел из А снова содержится в А. Доказать, что А обязательно содержит число 42.

10.3. Пусть в каждой клетке квадратной таблицы n на n, где n - нечётно, стоит 1 или –1. Обозначим произведения всех чисел в первой, второй,..., n-ой строках таблицы через $a_1,a_2,...,a_n$, а в первом, втором, ... , n-ом столбцах – через $b_1,b_2,...,b_n$. Доказать, что $a_1+a_2+...+a_n+b_1+b_2+...+b_n\neq 0$.

10.4. Докажите, что для любых положительных чисел a и b и любого натурального n выполняется неравенство $(1+\frac{a}{b})^n+(1+\frac{b}{a})^n\geq 2^{n+1}$.

10.5. Четырёхугольник ABCD вписан в окружность и длины сторон BC и DC равны, а длина стороны AB равна длине диагонали AC. Пусть точка P – середина дуги CD, не содержащей точку A, и Q – точка пересечения диагоналей AC и BD. Доказать, что прямые PQ и AB перпендикулярны.