Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике
Второй этап 2018-2019 г.г.
10 класс ***Каждая задача оценивается в 7 баллов***

10.1. Найти все четырёхзначные числа $\overline{xyzt}$, где все цифры x, y, z, t различны и не равны 0, такие, что сумма всех четырёхзначных чисел, получаемых из $\overline{xyzt}$ всевозможными перестановками цифр, в 10 раз больше числа $\overline{xxxx}$.

10.2. Найти все решения системы уравнений в действительных числах:

$$\begin{cases} x^3 - x + 1 = y^2, \\ y^3 - y + 1 = x^2. \end{cases}$$

10.3. Найти все натуральные числа n такие, что квадрат размера n на n клеток можно разрезать по линиям сетки на одноклеточный квадратик и четыре прямоугольника, все девять размеров сторон которых попарно различны.

10.4. Вне параллелограмма ABCD взята точка M такая, что угол MAB равен углу MCB и оба треугольника MAB и MCB расположены вне параллелограмма ABCD. Доказать, что угол AMB равен углу DMC.

10.5. По кругу записаны 32 числа $a_1, a_2, ..., a_{32}$, каждое из которых равно -1 или 1. За одну операцию каждое число $a_n, n = 1,2,...,32$ заменяют на произведение $a_n a_{n+1}$ его и следующего за ним по циклу числа, при этом индексы рассматриваются циклически, $a_{33} = a_1, a_{34} = a_2$.и так далее. Докажите, что для любого начального набора чисел $a_1, a_2, ..., a_{32}$ после некоторого конечного числа операций всегда получится набор из 32 единиц. Найдите наименьшее число N операций такое, что после применения N операций из любого начального набора чисел всегда получится набор из 32 единиц.