Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике
Второй этап **2018-2019 г.г.**
9 класс ***Каждая задача оценивается в 7 баллов***

9.1. Какую минимальную сумму цифр в десятичной записи может иметь число $f(n)=17n^2-11n+1$, где n пробегает все натуральные числа?
Ответ.2.
Решение. При $n=8$.число $f(n)$ равно 1001, следовательно, сумма его цифр равна 2. Если бы $f(n)$ при некотором n имело сумму цифр, равную 1, то оно бы имело вид 100,,,00 и либо равнялось бы 1, либо делилось бы на 10. Функция действительного переменного $f(x)$ достигает минимума при $x=\frac{11}{34}<1$, следовательно, возрастает при всех натуральных значениях x. Поэтому $f(n)\geq f(1)=7>1$ и значение 1 $f(n)$ принимать не может. Далее, легко заметить что $f(n)$ всегда является числом нечётным, поэтому не может делиться на 10. Следовательно, минимальная сумма цифр числа $f(n)=17n^2-11n+1$ равна 2 и достигается при $n=8$.
Критерии оценивания. Верный ответ с проверкой при $n=8$: 2 балла. Доказано, что $f(n)>1$ и значение 1 $f(n)$ принимать не может: 2 балла. Доказано, что $f(n)$ всегда является числом нечётным, поэтому не может делиться на 10: 3 балла.

9.2. Какой цифрой может заканчиваться число $f(x)=[x]+[3x]+[6x]$, где x - произвольное положительное действительное число? Здесь $[x]$ обозначает целую часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x.
Ответ. 0,1,3,4,6,7**.**
Решение. Обозначим $x=[x]+a$, где $0\leq a<1$- дробная часть x. Тогда легко понять, что $f(x)=[x]+[3x]+[6x]=10[x]+[a]+[3a]+[6a]$, поэтому от целой части x последняя цифра не зависит. Рассмотрим возможные значения его дробной части, разобьём интервал $[0,1)$ на шесть равных интервалов: $\left[0,\frac{1}{6}\right),\left[\frac{1}{6},\frac{2}{6}\right),\ldots,\left[\frac{4}{6},\frac{5}{6}\right),\left[\frac{5}{6},1\right)$. Значения $[a]$ на всех интервалах равны 0, значения $[3a]$ равны 0,0,1,1,2,2 соответственно, а значения $[6a]$ равны 0,1,2,3,4,5. Складывая соответствующие одинаковым интервалам значения, получим множество возможных последних цифр числа $f(x)=[x]+[3x]+[6x]$: это будут 0,1,3,4,6,7.
Критерии оценивания. Доказано, что последняя цифра x зависит только от дробной части x: 2 балла. Доказано, чем оканчиваются числа $[a],[3a]$ и $[6a]$ в зависимости от интервала:4 балла. Только приведены примеры, когда последние цифры равны 0,1,3,4,6,7: 1 балл.

9.3. Внутри равнобедренного треугольника ABC с равными сторонами AB=BC и углом 80 градусов при вершине B, взята точка M такая, что угол

MAC равен 10 градусов, а угол MCA равен 30 градусов. Найти величину угла AMB.
Ответ. 70 градусов.
Решение. Проведём из вершины B прямую, перпендикулярную стороне AC, точки её пересечения с прямыми AC и CM обозначим за P и T соответственно. Ввиду того, что угол MAC меньше угла MCA, сторона CM треугольника MAC меньше стороны AM, точка M лежит ближе к C, чем к A, поэтому T лежит на продолжении отрезка CM. Точка T лежит на серединном перпендикуляре AP к отрезку AC, значит треугольник ATC – равнобедренный, поэтому угол TAC равен 30 градусов, следовательно, углы BAT и MAT равны 20 градусов. Величины углов ABP=ABC/2=80/2=40 и AMT=MAC + MCA=10+30=40 равны, следовательно треугольники ABT и AMT равны по общей стороне AM и прилежащим к ней углам. Значит, равны их соответствующие стороны AB и AM и треугольник AMB – равнобедренный. Следовательно, его угол AMB при основании MB равен (180-BAM)/2=(180-(50-10))/2= (180-40)/2=70 градусов.
Критерии оценивания. Доказательство того, что T лежит на продолжении отрезка CM:: 1 балл. Доказательство равнобедренности треугольника ATC: 1 балл. Доказательство равнобедренности треугольника AMB: 4 балла. Нахождение угла AMB: 1 балл.

9.4. Докажите, что для произвольных положительных чисел a,b,c выполнено неравенство $\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ac}{a+c}\le\frac{a+b+c}{2}$.
Доказательство. В силу положительности a,b,c имеем $\frac{ab}{a+b}\le\frac{a+b}{4}\Leftrightarrow 4ab\le(a+b)^2\Leftrightarrow 0\le(a-b)^2$, что, очевидно, верно. Аналогично $\frac{bc}{b+c}\le\frac{b+c}{4},\frac{ac}{a+c}\le\frac{a+c}{4}$. Сложив три доказанных неравенства, получаем требуемое в условии.
.**Критерии оценивания**. Отсутствие упоминания положительности чисел при умножении на знаменатель: минус: 1 балл.

9.5. Последовательность различных натуральных чисел $a_n, n=1,2,3...$ такова, что $a_1=1, a_{n+1}\le 2n$ при всех $n\ge 1$. Доказать, что для любого натурального числа m найдутся такие члены этой последовательности a_p и a_q, что $a_q-a_p=m$.
Доказательство. Для произвольного фиксированного натурального m рассмотрим множество из $m+1$ числа $a_1,a_2,...a_{m+1}$, все они по условию, различны и не превосходят $2m$. Разобьём все натуральные числа от 1 до $2m$ на m пар $\{1,m+1\},\{2,m+2\},...\{m,2m\}$, по принципу Дирихле одна из этих пар содержит два из чисел $a_1,a_2,...a_{m+1}$, которые и образуют искомую в условии пару членов последовательности с разницей m.
Критерии оценивания.