Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике

Первый этап 2018-2019 г.г.

9 класс ***Каждая задача оценивается в 7 баллов***

9.1. Из пунктов А и Б навстречу друг другу с постоянными скоростями одновременно выехали соответственно мотоциклист и велосипедист. Спустя 20 минут после старта мотоциклист оказался на 2 км ближе к Б, чем середина АБ, а спустя 30 минут велосипедист оказался на 3 км ближе к Б, чем середина АБ. Через сколько минут после старта встретились мотоциклист и велосипедист?

Ответ. Через 24 минуты.

Решение. За 10 минут мотоциклист проезжает ¼ часть пути от А до Б и ещё 1 км, а велосипедист 1/6 часть пути от А до Б минус 1 км. Следовательно, за 10 минут оба они, двигаясь навстречу, проедут ¼ + 1/6=5/12 пути от А до Б. Значит, они вместе преодолеют путь от А до Б, то есть встретятся, через 10*12/5=24 минуты.

Критерии оценивания. Верный ответ с проверкой: 3 балла. Верно составлена система уравнений: 3 балла.

9.2. Может ли число, оканчивающееся на 222, быть нетривиальной степенью некоторого натурального числа, то есть представляться в виде x^y, где $x, y > 1$- натуральные числа?

Ответ. Нет, не может**.**

Решение. Число, оканчивающееся на 2, чётно, поэтому искомое в условии основание степени x должно быть чётно. В таком случае его $y \geq 2$-ая степень должна делиться на 2^y и, следовательно, делиться на 4. Но, в соответствии с признаком делимости на 4, число, оканчивающееся на 222, не делится на 4, так как две его последних цифры образуют число 22, не делящееся на 4.

Критерии оценивания. Замечено, что x должно быть чётно: 2 балла. Показано, что степень должна делиться на 4: 2 балла. Доказано, что число, оканчивающееся на 222 не может делиться на 4: 3 балла.

9.3. Вася должен на каждой грани нескольких кубиков написать по одной цифре так, чтобы любую упорядоченную комбинацию из трёх цифр от 000 до 999 включительно можно было получить, выбрав некоторых три различных кубика и положив их подходящими сторонами вверх в нужном порядке. При этом цифры 6 и 9 при повороте на 180 градусов не считаются переходящими друг в друга. Какое минимальное количество кубиков должен использовать Вася?

Ответ. 5.

Решение. Ввиду того, что среди возможных комбинаций должны быть 000,111,222,…,999, каждая цифра должна встречаться не менее, чем на трёх разных гранях (разных кубиков), поэтому всего на гранях должны быть записаны не менее 30 цифр, следовательно, должно быть не меньше 30:6=5 кубиков.

С другой стороны, покажем что, если цифры записаны так, что каждая цифра от 0 до 9 встречается на гранях трёх разных кубиков, то требование задачи выполнено. Рассмотрим произвольную комбинацию ABC из трёх цифр, первым выберем любой кубик, содержащий цифру A. Цифра B встречается кроме, возможно, первого кубика, ещё минимум на двух других, берём любой из них в качестве второго. Наконец, цифра C встречается ещё минимум на одном, кроме перового и второго кубиков, возьмём его в качестве третьего. Разложив их по порядку соответствующими гранями вверх, получим требуемую комбинацию ABC. Заметим, что рассуждения не зависят от того, различаются ли цифры A,B,C, или нет.

Приведём возможный способ записи цифр на гранях пяти кубиков так, чтобы каждая цифра встречалась на гранях трёх разных кубиков. Запишем в ряд все цифры от 0 до 9 с повторами по 3

раза: 000111222…888999. Первые пять цифр этого ряда запишем на первые грани пяти разных кубиков, вторые пять цифр запишем на вторые грани пяти разных кубиков, и так далее.
Критерии оценивания. Доказательство минимальности 5 кубиков: 3 балла. Приведение верного примера для 5 кубиков с обоснованием: 4 балла. Отсутствие обоснования: минус 2 балла.

9.4. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка P такая, что PC=2AP. Точка O – центр вписанной окружности треугольника PBC, E – точка касания этой окружности с прямой PB. Оказалось, что PB=BC. Доказать, что прямая AE параллельна прямой PO.
Доказательство. Поскольку треугольник PBC равнобедренный, вписанная в него окружность касается основания PC в его середине M. При этом, по свойству касательных PE=PM=PC/2=PA, следовательно, треугольник AEM вписан в окружность с диаметром AM и угол AEM – прямой. Значит, прямая AE перпендикулярна прямой ME. С другой стороны, в равнобедренном треугольнике EPM прямая PO является биссектрисой угла EPM и перпендикулярна его основанию ME. Таким образом, прямые AE и PO перпендикулярны ME и, следовательно, параллельны.
.**Критерии оценивания**. Перпендикулярность AE и EM: 3 балла. Перпендикулярность PO и EM: 2 балла.

9.5. На доске записаны 10 чисел: 1,2,3,4,4,5,5,11,12,13. С ними можно производить операции двух типов: либо из любых девяти из них вычесть 1, а к оставшемуся прибавить 9, либо наоборот, из одного вычесть 9, а к остальным прибавить по 1. При этом отрицательные числа получать нельзя. Можно ли, применив несколько таких операций, сделать все десять чисел разными?
Ответ. Нет**.**
Решение. Заметим, что при любой из описанных операций разность между любыми двумя написанными числами либо не изменяется, либо изменяется на 10. Разобьём все числа на 5 пар: 1 и 11, 2 и 12,3 и 13, 4 и 4,5 и 5, разности чисел в каждой паре равны 0 или 10. Если после нескольких операций все числа станут разными, то разности чисел в каждой паре станут не меньше 10.
Меньшие числа в парах будут не меньше 0,1,2,3,4, большие числа в парах не меньше 10,11,12,13,14 и сумма всех полученных чисел будет не меньше 0+10+1+11+2+12+3+13+4+14=70. Однако сумма исходных чисел равна 60, и при каждой операции она, очевидно, не меняется, поэтому сумма полученных чисел тоже должна равняться 60 – противоречие.
Критерии оценивания. Замечено, что при любой из описанных операций разность между любыми двумя написанными числами либо не изменяется, либо изменяется на 10: 2 балла.