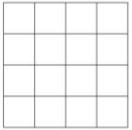
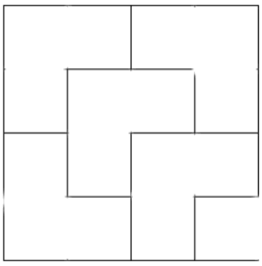
Решения и критерии проверки задач Второго этапа Всесибирской олимпиады школьников 2018-2019 г.г. по математике
8 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов



8.1. Из 40 спичек сложили квадратную сетку 4 на 4 как показано на рисунке (каждый отрезок длины 1 – это одна спичка). Уберите 11 спичек так, чтобы оставшиеся не ограничивали ни одного прямоугольника.

Ответ: можно, например, убрать следующим образом:

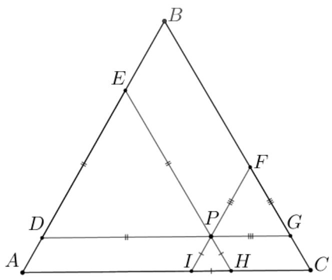


Критерии: любой верный пример без обоснования – 7 баллов.

8.2. У Арсения есть 2018 вёдер, в которые налито 1, 2, 3, … 2017, 2018 литров воды соответственно. Арсению разрешается взять два любых ведра и перелить из первого во второе ровно столько воды, сколько уже есть во втором ведре. Может ли Арсений собрать всю воду в одном ведре? Все вёдра достаточно большие, чтобы вся вода в них могла влезть.

Ответ: нет
Решение: всего в вёдрах 1 + 2 + … + 2018 = 2018*2019/2 = 1009*2019 литров воды – нечётное количество. А при любом переливании мы удваиваем количество воды в ведре, т.е., в частности, делаем чётным. Значит, получить нечётное количество в последнем ведре никак не выйдет.
Критерии: замечено, что после переливания всегда в ведре чётное количество воды, дальнейших продвижений нет – 3 балла.
Только ответ – 0 баллов.

8.3. В равностороннем треугольнике *ABC* через случайную точку внутри него провели три прямые: параллельно *AB* до пересечения с *BC* и *CA*; параллельно *BC* до пересечения с *AB* и *CA*; параллельно *CA* до пересечения с *BC* и *AB*. Докажите, что сумма трёх полученных отрезков равна удвоенной стороне треугольника *ABC*.



Решение: Пусть внутри треугольника выбрана произвольная точка *P*. Проведём отрезки и обозначим их так, как показано на рисунке. Очевидно, что треугольники *DEP*, *PFG*, *PIH* равносторонние, так как в них все углы по 60 градусов.
Далее заметим, что *BFPE* – параллелограмм, так как противоположные стороны в нём попарно параллельны. Значит, *PF* = *BE*. Аналогично *ADPI* – параллелограмм, следовательно, *AD* = *PI*.
Осталось заметить, что сумма трёх отрезков равна *EH* + *FI* + *GD* = *EP* + *PH* + *FP* + *PI* + *GP* + *PD* = 2*ED* + 2*PF* + 2*PI* = 2*ED* + 2*BE* + 2*AD* = 2*AB*, что и требовалось доказать.
Критерии: Рассмотрение частных случаев расположения точки *P* ничего не стоит.

8.4. По кольцевой дороге бегают Никита и Егор, стартовавшие из одного места в противоположные стороны. Известно, что Никита пробегает круг на 12 секунд быстрее, чем Егор, но всё равно тратит на это больше 30 секунд. Оказалось, что в седьмой раз после старта они встретились в том же месте, откуда начали. За какое время каждый из них пробегает круг?

Ответ: Никита за 36 секунд, Егор за 48 секунд.
Решение: Заметим, что между каждыми двумя встречами мальчики пробегают в сумме один круг. Значит, до 7-й встречи они вместе пробежали 7 кругов. Также отметим, что каждый из них пробежал целое число кругов, т.к. они встретились на линии старта. Так как Никита бегал быстрее, то он пробежал больше кругов, чем Егор, т.е. Никита пробежал 4,5 или 6 кругов (7 не мог, иначе бы Егор стоял), а Егор соответственно – 3, 2 или 1.
Пусть теперь Никита тратит на круг *t* секунд, а Егор *t*+12 секунд. Рассмотрим все случаи, сколько кругов до 7-й встречи пробежал Никита.

1) 4 круга, а Егор – 3. Тогда время, за которое Никита пробегает 1 круг, в 4/3 раза меньше, чем время Егора (за одно и то же время один пробежал 4 круга, а другой – 3). Значит, $t = 3/4(t + 12)$, откуда $t/4 = 9$, т.е. $t = 36$, а у Егора время $t + 12 = 48$ секунд.
2) 5 кругов, а Егор – 2. Аналогично получаем, что $t = 2/5(t + 12)$, откуда $t = 8$, что не подходит под условие.
3) 6 кругов, а Егор – 1. Получим, что $t = 1/6(t + 12)$, откуда $t = 12/5$, что тоже не подходит.
Значит, подходит только первый случай.

Критерии:

Ответ, ответ с проверкой – 0 баллов.
Замечено, что мальчики в сумме пробежали 7 кругов – 1 балл.
Замечено, что Никита пробежал 4-6 кругов – 1 балл, суммируется с предыдущим.
Потерян один случай – не более 5 баллов.
Потеряно более одного случая – не более 3 баллов.

8.5. За круглый стол сели 410 депутатов, причём каждый из них являлся либо рыцарем, который всегда говорит правду, либо лжецом, который всегда лжёт. Каждый из депутатов сказал: “Среди моих двадцати соседей слева и двадцати соседей справа в сумме ровно 20 лжецов”. Известно, что за столом по крайней мере половина людей – лжецы. Сколько за столом рыцарей?

Ответ: ни одного.

Решение: Разобьём всех сидящих за столом на десять групп по 41 человеку. Тогда хотя бы в одну группу попадёт хотя бы 21 лжец. Иначе в каждой группе их максимум 20, т.е. всего не более $20*10 = 200$, что меньше половины от общего числа. Рассмотрим эту группу.
Если в её центре сидит рыцарь, то он говорит правду, и в этой группе ровно 20 лжецов. Но мы уже установили, что их там хотя бы 21. Противоречие. Значит, в центре сидит лжец, а всего их в группе хотя бы 22 (всего ровно 21 быть не может, т.к. иначе центральный говорил бы правду). Рассмотрим теперь левого соседа центрального лжеца. Среди его 40 соседей есть хотя бы 21 лжец, т.к. одного крайнего соседа (может быть, лжеца) мы потеряли, сдвинувшись влево, но приобрели соседа-лжеца, который ранее был центральным. Повторяя рассуждения для него, получаем, что он тоже лжец. Сдвинемся опять влево и продолжим этот процесс. В конце концов мы получим, что все, сидящие за столов, являются лжецами.

Критерии:

Только ответ, ответ с проверкой – 0 баллов.
Доказано, что найдётся группа с 21 лжецом – 2 балла.
Доказано, что в этой группе в центре сидит лжец – ещё 1 балл.