Решения и критерии проверки задач Первого этапа Всесибирской олимпиады школьников 2018-2019 г.г. по математике 8 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

8.1. Расставьте по кругу цифры от 1 до 9 таким образом, что любые две соседние цифры, если их прочитать по часовой стрелке, образуют составное двузначное число. Достаточно привести один пример.

Решение: Например, подойдёт расстановка 1 2 7 4 5 6 3 9 8. Возможны и другие решения.

Критерии:

Любой верный пример без объяснения – 7 баллов.

8.2. В соревновании участвует 2018 команд по доте, все разной силы. В поединке между двумя командами всегда побеждает более сильная. Все команды побились на пары и сыграли одну игру. Затем разбились на пары другим образом и сыграли ещё одну игру. Оказалось, что ровно одна команда выиграла обе игры. Как такое могло быть?

Решение: Пронумеруем команды по возрастанию силы от 1 до 2018. В первом туре проведём игры 1 – 2, 3 – 4, …, 2017 – 2018, во втором – 2018 – 1, 2 – 3, 4 – 5, …, 2016 – 2017. Очевидно, что только команда с номером 2018 победит в обоих турах.

Критерии:

Любой верный пример без объяснения – 7 баллов.

8.3. Юра выбрал три целых попарно различных числа a, b, c. Затем сложил числа a и b и получил число c. Потом он перемножил числа b и c и получил a. Найдите все такие тройки чисел и докажите, что других нет.

Ответ: $a = -4$, $b = 2$, $c = -2$.

Решение: Итак, $a + b = c$, $bc = a$. Значит, $bc + b = c$. Преобразуем это выражение в $b(c + 1) = c$. Левая часть делится на $c + 1$, значит, и правая часть делится. То есть, c кратно $c + 1$. При этом, если число $c + 1$ делится на m, то с даёт при делении на m остаток $m - 1$. Значит, либо $c + 1 = 1$ (но тогда $c = 0$ и $b = 0$), либо $c + 1 = -1$, тогда $c = -2$, а отсюда $b = 2$, $a = -4$.

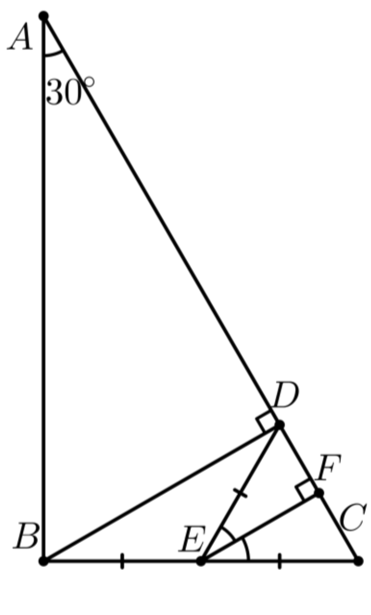
Критерии:

Ответ – 0 баллов.

Ответ с проверкой – 1 балл.

Получено равенство $b(c + 1) = c$, дальше рассматривается несколько случаев, но не все – не более 3 баллов.

8.4. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом B и углом A, равным 30, провели высоту BD. Затем в треугольнике BDC провели медиану DE, а в треугольнике DEC – биссектрису EF. Найдите отношение FC к AC.



Решение: Так как угол BDC прямой, отрезок DE – это медиана в прямоугольном треугольнике BDC, проведённая из вершины прямого угла. Значит, $BE = ED = EC$. В частности, треугольник EFC равнобедренный, значит, EF – медиана, и $2FC = DC$. Так как угол BAD равен 30, то угол ABD равен 60, и, следовательно, угол DBC равен 30.

Наконец, в прямоугольном треугольнике BDC угол DBC равен 30, следовательно, противолежащий катет равен половине гипотенузы, т.е. $2DC = BC$. В прямоугольном треугольнике ABC угол A равен 30, следовательно, $2BC = AC$. Соединяя все полученные равенства, получаем, что $8FC = AC$, т.е. искомое отношение равно 1:8.

Критерии:
Только ответ – 0 баллов.
Замечено, что $DE = EB = EC$ – 1 балл.
Доказано, что $FC = FD$ – 1 балл.
Хотя бы раз применено свойство треугольника с углом 30 – 1 балл.
Все предыдущие баллы суммируются.

8.5. Одиннадцать лучших футбольных команд сыграли каждая с каждой по одному матчу. При этом оказалось, что каждая команда забила в первом матче 1 гол, во втором матче 2 гола, .., в десятом матче — 10 голов. Какое наибольшее количество сыгранных матчей могло закончиться вничью?
Решение: По условию каждая команда в первой игре забила 1 гол. В случае ничьей она и пропустила 1 гол. Тогда для другой команды эта встреча также была первой. Так как количество команд нечётно, их нельзя разбить на пары. Значит, хотя бы одна из команд сыграла не вничью свой первый матч. Аналогичное верно для вторых, третьих, …, десятых матчей. Поскольку каждый матч учтён дважды, результативных матчей (то есть не ничейных) было не менее 5, а тогда ничьих было не больше $11\cdot10/2 - 5 = 50$.
Приведём пример турнира с 50 ничьими. Занумеруем команды числами от 1 до 11. Составим 5 пар из соседних команд (оставив 11-ю команду без пары). Сначала играют между собой команды в парах, а затем 11-я играет с 1-й (со счётом 1 : 2). Снова объединяем команды в пары, исключая на этот раз 1-ю, и пусть снова встретятся команды в парах (и вновь будет 5 ничьих). Теперь расположим команды по кругу с шагом 2, а именно в порядке 1 3 5 7 9 11 2 4 6 8 10 (у каждой команды оба соседа поменялись). Применив ту же схему розыгрыша, получим ещё 11 игр, из которых одна результативная. Далее применим эту же схему для шага 3, 4 и 5.
Можно даже выписать конкретную таблицу:

Все играют первую игру, везде ничьи	1 2, 3 4, 5 6, 7 8, 9 10
11 – первая игра, 1 – вторая игра	11 1
Все играют вторую игру, везде ничьи	2 3, 4 5, 6 7, 8 9, 10 11
Все играют третью игру, везде ничьи	1 3, 5 7, 9 11, 2 4, 6 8
10 – третья игра, 1 – четвёртая игра	10 1
Все играют четвёртую игру, везде ничьи	3 5, 7 9, 11 2, 4 6, 8 10
Все играют пятую игру, везде ничьи	1 4, 7 10, 2 5, 8 11, 3 6
9 – пятая игра, 1 – шестая игра	9 1
Все играют шестую игру, везде ничьи	4 7, 10 2, 5 8, 11 3, 6 9
Все играют седьмую игру, везде ничьи	1 5, 9 2, 6 10, 3 7, 11 4
8 – седьмая игра, 1 – восьмая игра	8 1
Все играют восьмую игру, везде ничьи	5 9, 2 6, 10 3, 7 11, 4 8
Все играют девятую игру, везде ничьи	1 6, 11 5, 10 4, 9 3, 8 2
7 – девятая игра, 1 – десятая игра	7 1
Все играют десятую игру, везде ничьи	6 11, 5 10, 4 9, 3 8, 2 7

Критерии:
Только ответ – 0 баллов.
Только оценка, что ничьих не более 50 – 2 балла.
Только пример на 50 ничьих – 3 балла.
Есть оценка и верная идея примера, но есть неточности – 5 или 6 баллов в зависимости от размеров неточностей.