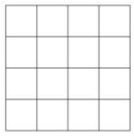
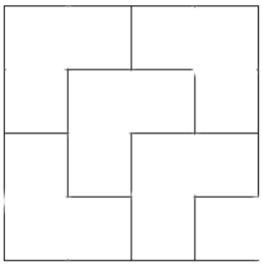
Решения и критерии проверки задач Второго этапа
Всесибирской олимпиады школьников 2018-2019 г.г. по математике
7 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

7.1. Из 40 спичек сложили квадратную сетку 4 на 4 как показано на рисунке (каждый отрезок длины 1 – это одна спичка). Уберите 11 спичек так, чтобы оставшиеся не ограничивали ни одного прямоугольника.



Ответ: можно, например, убрать следующим образом:



Критерии: любой верный пример без обоснования – 7 баллов.

7.2. У Арсения есть 10 столитровых вёдер, в которые налито 1, 2, 3, … 9, 10 литров воды соответственно. Арсению разрешается взять два любых ведра и перелить из первого во второе ровно столько воды, сколько уже есть во втором ведре. Может ли Арсений собрать всю воду в одном ведре?

Ответ: нет
Решение: всего в вёдрах 1 + 2 + … + 10 = 55 литров воды – нечётное количество. А при любом переливании мы удваиваем количество воды в ведре, т.е., в частности, делаем чётным. Значит, получить нечётное количество в последнем ведре никак не выйдет.
Критерии: замечено, что после переливания всегда в ведре чётное количество воды, дальнейших продвижений нет – 3 балла.
Только ответ – 0 баллов.

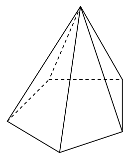
7.3. Егор взял у Никиты в долг 28 рублей, а затем отдал их обратно четырьмя платежами. Оказалось, что Егор всегда возвращал целое количество рублей, а сумма выплаты каждый раз росла и нацело делилась на предыдущую. Какую сумму отдал Егор последней?

Ответ: 18 рублей
Решение:
1) Если в первый раз Егор выплатил a рублей, то во второй – не меньше $2a$, в третий – не меньше $4a$, в четвертый – не меньше $8a$, а всего – не меньше $15a$. Поскольку $15a \leq 28$, получаем, что $a = 1$.
2) Во второй раз он заплатил 2 или 3 рубля (потому что если 4, то заплатил хотя бы 1+4+8+16 = 29 > 28).
2.1) Если он заплатил 2 рубля, то ему осталось выплатить 25 рублей, а между тем в этом случае все выплаты далее будут чётными. Этот случай невозможен.
2.2) Значит, он заплатил 3 рубля, и за два последних раза ему осталось выплатить 24 рубля. Пусть в третий раз он заплатил в a раз больше, чем во второй, а в четвертый – в b раз больше, чем во третий. Тогда $3a + 3ab = 24$, то есть $a + ab = a(b+1) = 8$. Получается, что a и $b+1$ – степени двойки, причем $b > 1$, а это возможно только при $a = 2$ и $b = 3$. Отсюда – ответ.

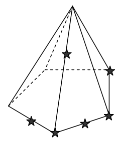
Критерии:
Только ответ 0 – 0 баллов.

Только ответ с проверкой (выписаны все 4 суммы, показано, что все условия выполнены) – 1 балл, он не суммируется ни с чем.
Каждый из пунктов 1), 2), 2.1) стоит по одному баллу, эти баллы суммируются.
В целом верное решение, но 2.2) доказывается неполным перебором – не более 5 баллов.

7.4. На поверхности пятиугольной пирамидки (см. рис.) в попарно различных точках живёт несколько гномиков, причём они могут жить как внутри граней, так и на рёбрах или в вершинах. Оказалось, что на каждой грани (включая вершины и рёбра, её ограничивающие) живёт разное число гномиков. Какое минимальное число гномиков живёт на пирамидке?



Ответ: 6
Решение: Граней всего 6, поэтому на самой “населенной” из них живёт не менее 5 гномиков. Если всего гномиков ровно 5, то все они живут на одной грани (пусть это грань A), поэтому те грани, на которых живут 4 и 3 гномика (пусть B и C соответственно), являются соседними с ней. Тогда на ребре A-B должно жить 4, а на ребре A-C – 3 гномика. Тогда всего гномиков уже хотя бы 7, причём только одного мы могли посчитать дважды – того, кто сидит в вершине, соединяющей грани A, B и C. То есть гномиков хотя бы 6 – противоречие.
Пример на 6 гномиков на рисунке.



Критерии:
Только ответ – 0 баллов.
Только верный пример – 2 балла.
Только доказательство того, что меньше 5 быть не может – 1 балл.
Только доказательство того, что меньше 6 быть не может – 3 балла.
Эти баллы НЕ складываются.
Обоснование примера не требуется.

7.5. За круглым столом рассаживаются 47 депутатов из 12 различных регионов, причём они пытаются добиться того, чтобы среди любых 15 подряд сидящих людей были представители всех регионов. Смогут ли депутаты осуществить задуманное?

Ответ: нет
Решение: Предположим, что смогут. Заметим, что найдётся регион, из которого приехало не более трёх депутатов. Иначе депутатов всего хотя бы $12*4 = 48 > 47$.
Рассмотрим этих троих (или менее) депутатов. Они сидят в кругу, и между каждыми двумя соседними сидит не более 14 человек, т.к. иначе найдутся 15, среди которых нет именно этого региона. Тогда всего в кругу сидит не более $3 + 14*3 = 45$ (3 наших депутата + 3 промежутка по 14) человек, а должно быть 47. Противоречие.
Критерии:
Только ответ – 0 баллов.
Только замечено, что найдётся регион с <4 депутатами – 2 балла.