Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике
Второй этап 2018-2019 г.г.
10 класс ***Каждая задача оценивается в 7 баллов***

10.1. Найти все четырёхзначные числа $\overline{xyzt}$, где все цифры x, y, z, t различны и не равны 0, такие, что сумма всех четырёхзначных чисел, получаемых из $\overline{xyzt}$ всевозможными перестановками цифр, в 10 раз больше числа $\overline{xxxx}$.

Ответ. Число 9123 и все числа, получающиеся из него перестановкой трёх последних цифр, всего 6 ответов.

Решение. Четырёхзначных чисел, получаемых из $\overline{xyzt}$ всевозможными перестановками цифр будет 24, всего в них в каждом разряде каждая из цифр x, y, z, t встречается ровно 6 раз. Следовательно, сумма всех таких чисел равна $6(x+y+z+t)(1000+100+10+1)=6666(x+y+z+t)$, что, по условию, равно $11110x$. Отсюда $3(y+z+t)=2x$. По условию, все цифры x, y, z, t различны и не равны 0, следовательно, левая часть равенства не меньше 3(1+2+3)=18, откуда получаем единственную возможность $x=9$ а y, z, t являются любой перестановкой цифр 1,2,3.

Критерии оценивания. Если приведён полный верный ответ с проверкой: 1 балл. Верное нахождение суммы в левой части равенства:3 балла.

10.2. Найти все решения системы уравнений в действительных числах:

$$\begin{cases} x^3 - x + 1 = y^2, \\ y^3 - y + 1 = x^2. \end{cases}$$

Ответ.. $(\pm1,\pm1)$ - всего 4 решения.

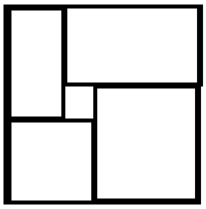
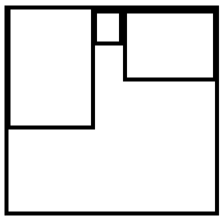
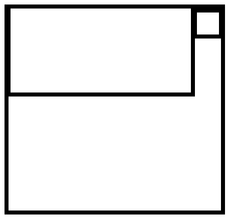
Решение. Перенесём в каждом уравнении 1 направо и перемножим уравнения, получив равенство $(x^2-1)(y^2-1)xy=(x^2-1)(y^2-1)$, откуда либо $x^2-1=0$, либо $y^2-1=0$, либо $xy=1$. В двух первых случаях сразу получаем 4 решения $(x,y)=(\pm1,\pm1)$. В третьем случае, заменяя в первом уравнении y на $\frac{1}{x}$ и приведя к общему знаменателю, получаем уравнение $x^5-x^3+x^2-1=0$. Разлагаем его на множители: $(x^2-1)(x^3+1)=(x^2-1)(x+1)(x^2-x+1)=0$. Две первых скобки дают уже найденные решения, третья скобка действительных корней не имеет, так как её дискриминант меньше 0. Следовательно, решениями системы являются 4 пары $(x,y)=(\pm1,\pm1)$.

Критерии оценивания. Приведены верные ответы без доказательства, что других нет: 1 балл. Потеря части решений: минус 1-3 балла.

10.3. Найти все натуральные числа n такие, что квадрат размера n на n клеток можно разрезать по линиям сетки на одноклеточный квадратик и четыре прямоугольника, все девять размеров сторон которых попарно различны.

Ответ. Все $n \geq 11$.

Решение. Покажем, что схема разрезания должна выглядеть, как показано на левом рисунке (заметим, что в решении **это доказательство не обязательно**, достаточно просто указать саму схему!):

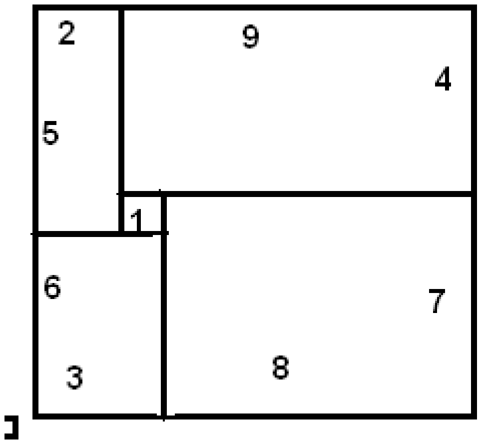
Действительно, если квадратик будет прилегать к стороне или вершине квадрата, то рядом с ним будут два или один прямоугольника с большими, чем 1 сторонами (см. центральный и правый рисунки), и к стороне квадратика, не прилегающей к этим прямоугольникам и сторонам квадрата, ничто с большими, по условию, сторонами прилегать не может.

После этого заметим, что каждая вершина квадрата содержится в своём прямоугольнике разбиения. В противном случае одна из сторон одного из прямоугольников совпадает со стороной квадрата, а вторая его сторона меньше, отрезав его, мы получим разбиение оставшегося прямоугольника на квадратик и три прямоугольника с разными сторонами. Повторяя предыдущее рассуждение получим, что квадратик снова должен не прилегать к сторонам оставшегося прямоугольника, а значит, своими четырьмя сторонами прилегать к четырём разным прямоугольникам разбиения, чего не может быть, поскольку их тут осталось всего три.

Из сказанного выше следует, что схема разрезания должна выглядеть так, как показано на левом рисунке:

Найдём минимально возможную площадь искомого квадрата. Пусть длины девяти сторон частей разбиения в порядке возрастания равны $a_1 = 1, a_2 \ge 2, \dots a_9 \ge 9$. Чтобы найти минимальную общую площадь квадратика и 4 прямоугольников с такими сторонами, воспользуемся широко известным «транснеравенством», которое, в частности, утверждает, что для любых чисел $a_1 \le a_2 \le .. \le a_n$ и $b_1 \le b_2 \le .. \le b_n$ минимум сумм вида $S(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)}$, где $\sigma(1), \sigma(2), \dots \sigma(n)$ - произвольная перестановка чисел $1, 2, \dots, n$, достигается на сумме $S(\sigma)$ для $\sigma(i) = n+1-i, i = 1, \dots n$, то есть когда каждое i - ое в порядке возрастания число первого множества умножается на i - ое в порядке убывания число второго множества. Отсюда следует, что минимальная площадь квадратика и 4 прямоугольников равна $1 + a_2 a_9 + a_3 a_8 + a_4 a_7 + a_5 a_6 \ge 1 + 18 + 24 + 28 + 30 = 101 > 10^2$. Следовательно, минимально возможная длина стороны большого квадрата равна 11.

Укажем способ разрезания квадрата со стороной $n = 11$ требуемым в условии способом, длины сторон соответствующих прямоугольников указаны цифрами на рисунке:



Способ разрезания для любого натурального $n \geq 11$ получается из данного расширением квадрата и 3 прямоугольников вправо и вниз на $n-11$ клеток. Все размеры при этом останутся различными, так как одинаково увеличиваться будут длины, равные 6,7,8 и 9, которые и так уже больше остающихся неизменными длин 2,3,4 и 5

Критерии оценивания. Доказательство минимальности $n=11$: 3 балла. Способ разрезания для $n=11$: 2 балла. Способ разрезания для всех $n \geq 11$: ещё 2 балла. Отсутствие обоснования того, что минимальная площадь квадратика и 4 прямоугольников равна $1+a_2a_9+a_3a_8+a_4a_7+a_5a_6 \geq 1+18+24+28+30=101>10^2$: минус 1 балл.

10.4. Вне параллелограмма ABCD взята точка M такая, что угол MAB равен углу MCB и оба треугольника MAB и MCB расположены вне параллелограмма ABCD. Доказать, что угол AMB равен углу DMC.

Решение. Отметим точку P такую, что точки BPMC в таком порядке образуют параллелограмм. Тогда углы MPB и MCB= MAB равны, значит четырёхугольник APMB – вписанный. Следовательно, углы AMB и APB равны, как вписанные, опирающиеся на общую дугу AB. Заметим, что APMD тоже параллелограмм, тогда стороны AP и PB угла APB параллельны сторонам угла MD и MC угла DMC, как противоположные стороны в параллелограммах APMD и BPMC соответственно. Следовательно, углы APB=AMB и DMC равны.

Критерии оценивания.

10.5. По кругу записаны 32 числа $a_1, a_2, \dots a_{32}$, каждое из которых равно -1 или 1. За одну операцию каждое число $a_n, n=1,2,\dots,32$ заменяют на произведение $a_n a_{n+1}$ его и следующего за ним по циклу числа, при этом индексы рассматриваются циклически, $a_{33}=a_1, a_{34}=a_2$.и так далее. Докажите, что для любого начального набора чисел $a_1, a_2, \dots a_{32}$ после некоторого конечного числа операций всегда получится набор из 32 единиц. Найдите наименьшее число N операций такое, что после применения N операций из любого начального набора чисел всегда получится набор из 32 единиц.

Ответ. 32.

Решение. Покажем индукцией по n, что, если по кругу записаны 2^n чисел, то ответ задачи равен 2^n. База индукции $n=1$ рассматривается несложно: либо $\{1,-1\} \to \{-1,-1\} \to \{1,1\}$, либо $\{-1,-1\} \to \{1,1\}$, в любом случае двух операций всегда достаточно, а меньше – не всегда.

Шаг индукции. Пусть по кругу записаны 2^{n+1} чисел и утверждение верно для любых 2^n плюс-минус единиц по кругу. Рассмотрим отдельно множества A,

из 2^n чисел, стоящих на местах с нечётными индексами и В – из 2^n чисел стоящих на местах с чётными индексами, Заметим, что после выполнения двух операций каждое число $a_k, k=1,2,...,32$ заменится на произведение $(a_k a_{k+1})(a_{k+1} a_{k+2}) = a_k a_{k+2}$, так как $a_{k+1}{}^2 = 1$. Отсюда следует, что, в результате выполнения двух операций на исходном множестве из 2^{n+1} чисел множества А и В меняются так, как если бы на каждом из них было выполнено по одной операции. По предположению индукции, для того, чтобы получить вместо множеств А и В множества из одних единиц, достаточно 2^n операций, следовательно, чтобы получить все единицы из исходного множества, достаточно вдвое большего числа операций, то есть $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$операций. Примером множества чисел, для которого необходимо ровно 2^{n+1}операций, является множество из 31 единицы и одной минус единицы. После двух операций оно даст аналогичные множества чисел А и В, для которых, по индукции, нужно ровно 2^n операций, значит для исходного множества их нужно ровно $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.
При количестве чисел $32 = 2^5$ число необходимых операций рано 32.
Критерии оценивания. Доказано, что 32 операций достаточно: 4 балла. Доказано, что меньше 32 операций может не хватить: 3 балла.