Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике

Первый этап 2018-2019 г.г.

10 класс ***Каждая задача оценивается в 7 баллов***

10.1. Найти все числа a и b, для которых равенство $|ax+by|+|bx+ay|=|x|+|y|$ выполнено при всех значениях переменных x и y.

Ответ. $a=\pm1, b=0$ или $a=0, b=\pm1$, всего четыре пары значений.

Решение. Подставим в формулу из условия сначала $x=1, y=0$, получим $|a|+|b|=1$. Затем подставим $x=1, y=1$, откуда $|a+b|=1$. Наконец, положив $x=1, y=-1$, имеем $|a-b|=1$. Из двух последних равенств получаем $a+b=\pm(a-b)$, откуда либо $a=0$, либо $b=0$. Из первого равенства тогда следует $a=\pm1, b=0$ или $a=0, b=\pm1$.

Убедимся, что найденные пары a и b удовлетворяют условию задачи. Например, если $a=1, b=0$, то $|ax+by|+|bx+ay|=|ax|+|ay|=|a|(|x|+|y|)=|x|+|y|$. Остальные варианты проверяются аналогично.

Критерии оценивания. Если приведён верный ответ с проверкой: 2 балла. Только ответ: 0 баллов. Если отсутствует проверка того, что найденные кандидаты в ответы $a=\pm1, b=0$ или $a=0, b=\pm1$ удовлетворяют условию задачи: снимаем 2 балла.

10.2. Найти все пары натуральных чисел x и y таких, что их наименьшее общее кратное равно $1+2x+3y$.

Ответ. $x=4, y=9$ или $x=10, y=3$.

Решение. Пусть сначала $x\le y$ Заметим, что y не может делиться на x, иначе наименьшее общее кратное x и y равно y, а это меньше $1+2x+3y$. В частности, $x>1$.

Далее, наименьшее общее кратное x и y делится на x и y, поэтому $1+2x+3y$ делится на x и y, а значит $1+2x$ делится на y и $1+3y$ делится на x. Из делимости $1+2x$ на y следует $1+2x=ky\ge y$, что вместе с предположением $x\le y$ влечёт $k=1, y=2x+1$. Тогда из делимости $1+3y=6x+4$ на x и $x>1$ следуют делимость 4 на x и возможности $x=2,4$. Проверка показывает, что решением в этом случае является $x=4, y=9$.

Теперь рассмотрим случай $x\ge y>1$, из делимости $1+3y\le1+3(x-1)=3x-2$ на x следует $1+3y=x$ или $1+3y=2x$. Если $1+3y=x$, то $1+2x=6y+3$ делится на y, тогда 3 делится на y и $x=10, y=3$ является решением задачи.

Если $1+3y=2x$, то y нечётно, $y=2k+1, k>0$, $x=3k+2$. Тогда $1+2x=6k+5$ должно делиться на $y=2k+1$, значит $6k+5-3(2k+1)=2$ делится на $y=2k+1\ge3$, что невозможно.

Критерии оценивания. Только правильный ответ: с проверкой: 1 балл. Замечено, что y не может делиться на x и $x, y>1$.: 1 балл. Верно найдено только одно решение: 4 балла.

10.3. Найти количество различных способов расстановки 8 ладей в клетках шахматной доски 8 на 8 таких, чтобы каждая клетка доски находилась под боем хотя бы одной из них. Ладьи могут бить друг друга, ладья бьёт все клетки горизонтали и вертикали, в которой она стоит, включая саму клетку, в которой стоит.

Ответ. $2\cdot8^8-8!$.

Решение. Докажем, что расстановка 8 ладей, удовлетворяет условию тогда и только тогда, когда либо в каждой горизонтали стоит по ладье, либо в каждой вертикали стоит по ладье, либо и то и другое одновременно. Положение ладей в горизонталях или вертикалях при этом произвольное. Достаточность приведённого условия очевидна.

Если есть вертикаль, в которой нет ладьи, то каждая из её 8 клеток должна биться ладьёй, стоящей на одной с ней горизонтали. Следовательно, если ладьи стоят не во всех вертикалях, то они стоят на всех горизонталях.

Расстановок, при которых в каждой вертикали стоит ладья будет 8^8, так как для каждой из 8 ладей есть 8 независимых способов размещения в одной из клеток соответствующей вертикали. Аналогично, есть 8^8 расстановок, при которых на каждой горизонтали стоит ладья. При этом расстановки, в которых одновременно и в каждой вертикали, и на каждой горизонтали стоит ладья, то есть когда ладьи не бьют друг друга, учитывается дважды, поэтому ответ получается вычитанием из 8^8+8^8 количества таких расстановок, равного 8!. Итого получаем ответ $2\cdot 8^8-8!$

Критерии оценивания. Доказательство того, что, либо в каждой горизонтали стоит по ладье, либо в каждой вертикали стоит по ладье: 2 балла. Правильный подсчёт числа расстановок, где в каждой горизонтали (вертикали) стоит по ладье: 1 балл. Правильный подсчёт числа расстановок, в которых и в каждой вертикали, и на каждой горизонтали стоит ладья: 1 балл.

Вычитание числа таких расстановок из числа 8^8+8^8: 3 балла.

10.4. Пусть для положительных чисел a,b,c,x,y,z выполнены соотношения: $ac-b^2>0$ и $az-2by+cx=0$. Доказать, что тогда $xz-y^2\le 0$.

Доказательство. От противного, пусть $xz-y^2>0$. Запишем соотношения в виде $ac>b^2, xz>y^2, 2by=az+cx$. Все части неравенств положительны, перемножив первые два и домножив на 4, а также возведя третье в квадрат, получим $4b^2y^2=(az+cx)^2<4ac\cdot xz=4az\cdot cx$, откуда $(az-cx)^2<0$, что невозможно. Ввиду полученного противоречия предположение о том, что $xz-y^2>0$ неверно, следовательно $xz-y^2\le 0$, что и требовалось доказать.

Критерии оценивания. Отсутствие комментариев о положительности частей при умножениях неравенств: минус 1 балл.

10.5. Доказать, что разность длин диагонали A_1A_4 и стороны A_1A_2 правильного десятиугольника $A_1A_2A_3...A_{10}$ равна радиусу его описанной окружности. Десятиугольник называется *правильным*, если все его углы равны между собой и все его стороны равны между собой.

Доказательство. Величины дуг описанной окружности, на которые её разбивают вершины вписанного десятиугольника, все равны по 36 градусов, поэтому величина дуги между вершинами десятиугольника равна 36 градусов, умножить на разность номеров этих вершин по модулю 10. Заметим, что дуги A_2A_5 и A_1A_8 описанной окружности равны, следовательно, диагональ A_5A_8 параллельна стороне A_1A_2. Дуги A_5A_8 и A_1A_4 также равны, следовательно, равны длины соответствующих диагоналей A_5A_8 и A_1A_4. Аналогично можно заметить, что параллельны диагонали A_1A_8, A_2A_7 и A_4A_5, причём A_2A_7 является диаметром описанной окружности, так как соответствующая ей дуга A_2A_7 равна 180 градусов. Отметим P – точку пересечения диагоналей A_2A_7 и A_5A_8 и O – центр описанной окружности, совпадающий с серединой диагоналей A_2A_7 .и A_4A_9, параллельной A_5A_8. Четырёхугольники $A_1A_2PA_8$ и OPA_5A_4 - параллелограммы, значит, A_1A_2 = A_8P и $PA_5=OA_4=R$-радиусу описанной окружности. Следовательно, разность длин A_1A_4 и A_1A_2 равна разности длин A_5A_8 и A_8P, то есть равны $PA_5=OA_4=R$-радиусу описанной окружности, что и требовалось доказать.

Критерии оценивания. Замечены равенства и параллельности определённых диагоналей в правильном 10-угольнике: 1 балл.