Всесибирская открытая олимпиада школьников 2017-2018 г.г. по математике

Первый этап **10 класс** **05**.11.2017

Каждая задача оценивается в 7 баллов *Время выполнения заданий олимпиады: 4 астрономических часа*

10.1. Два спортсмена с постоянными скоростями бегают по овальной дорожке небольшого стадиона, первый из них пробегает дорожку полностью на 5 секунд быстрее, чем второй. Если они побегут по дорожке с одной точки старта в одном направлении, то в первый раз снова встретятся через 30 секунд. Через сколько секунд они в первый раз снова встретятся, если побегут по дорожке с одной точки старта в противоположных направлениях?

10.2. Найти все пары действительных значений a и b, при которых оба уравнения $x^2+ax+b^2=0$ и $x^2+bx+a^2=0$ имеют хотя бы один общий корень.

10.3. В ряд слева направо записаны все натуральные числа от 1 до 37 в таком порядке, что каждое число, начиная со второго по 37-ое, делит сумму всех чисел, стоящих левее него: второе делит первое, третье — сумму первого и второго, и т. д, последнее — сумму первых тридцати шести. На первом слева месте оказалось 37, какое число стоит на третьем месте?

10.4. В квадрат ABCD вписана окружность, касающаяся его сторон AB, BC, CD, DA в точках P,Q,R и S соответственно. На отрезках AP и AS взяты точки M и N так, что отрезок MN касается вписанной окружности. Докажите, что отрезки MC и NR параллельны.

10.5. Какое максимальное число квадратов 2 на 2 можно уложить на клетчатую доску размера 7 на 7 квадратов так, чтобы каждые два уложенных квадрата имели не больше одной общей клетки? Квадраты 2 на 2 укладываются по линиям сетки так, что каждый закрывает ровно 4 клетки. Квадраты не выходят за границу доски.