Решения заданий второго этапа Всесибирской открытой олимпиады школьников 2017-2018 г.г. по математике

Каждая задача каждого класса оценивается из 7 баллов

9 класс

9.1. Есть два слитка разных сплавов меди и олова весом 6 и 12 кг соответственно. От каждого из них отпилили по одинаковому куску и сплавили первый кусок с остатками второго слитка, а второй кусок — с остатками первого слитка, после чего соотношение меди и олова в двух полученных новых слитках оказалось одинаковым. Найти вес каждого из отпиленных кусков.

Ответ. 4 килограмма.

Решение. Обозначим вес каждого из отпиленных кусков за x . кг, а доли олова в первом и втором слитках за $a\neq b$ соответственно. Тогда доля олова после переплавки в первом слитке будет $\frac{bx+a(6-x)}{6}$, а во втором слитке $\frac{ax+b(12-x)}{12}$ и они, по условию, равны. Решая полученное уравнение, находим $x=4$ при всех $a\neq b$.

Критерии проверки. Приведён правильный ответ с проверкой для произвольных $a\neq b$: 1 балл. Разбор частного случая: 0 баллов.

9.2. Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон AB, BC и CA в точках P, K и M соответственно, а точки T и X - середины отрезков MP и MK. Докажите, что четырехугольник ATXC — вписанный.

Доказательство. Заметим, что треугольники APM, BPK и CMK равнобедренные и отрезки AT и CX — высоты к основаниям в APM и CMK, а средняя линия TX треугольника PKM параллельна его стороне PK. Тогда угол TAM равен половине угла A, а угол TXC равен сумме углов CXM и TXM. Угол CXM прямой, а угол TXM равен углу PKM, который равен углу PMA, как вписанный во вписанную окружность и опирающийся на хорду PM с проведённой через её вершину M касательной AC. Сумма углов PMA и TAM в прямоугольном треугольнике ATM равна 90 градусов, значит, сумма углов TAM и TXC равна 180 градусов. Следовательно, четырёхугольник ATXC — вписанный.

Критерии проверки. Замечание, что треугольники APM, BPK и CMK равнобедренные и правильная работа с их углами: 1 балл. Отмечено, что средняя линия TX треугольника PKM параллельна его стороне PK: 1 балл. Замечено, что угол TXM равен углу PMA: 3 балла. Показано далее, что сумма углов TAM и TXC равна 180 градусов. 2 балла.

9.3. Найти пять различных чисел, если всевозможные суммы троек этих чисел равны 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 14, 15 и 17. Числа не обязательно целые.

Ответ. -3,2,4,5,8.

Решение. Обозначим искомые числа за $a<b<c<d<e$.

Заметим, что каждое число входит ровно в шесть троек чисел, следовательно, сложив все десять сумм троек и поделив на 6, мы получим сумму всех пяти чисел, равную 16. Очевидно, что минимальной будет сумма $a+b+c=3$, откуда $d+e=16-a-b-c=13$, а максимальной — сумма $c+d+e=17$, откуда $a+b=16-c-d-e=-1$. Значит, $c=a+b+c-a-b=c+d+e-d-e=4$.

Следующей по величине после $a+b+c$ будет $a+b+d$, слагаемые которой в порядке возрастания не больше слагаемых любой другой, отличной от $a+b+c$ тройки, следовательно. $d=4-a-b=5$. Предпоследней по величине перед $c+d+e$ будет $b+d+e$, слагаемые которой в порядке возрастания не меньше слагаемых любой другой, отличной от $c+d+e$ тройки, следовательно. $b=15-d-e=2$.

Теперь находим $a=a+b-b=-1-2=-3$, $e=d+e-d=13-5=8$. Итого:

$a=-3, b=2, c=4, d=5, e=8$.

Критерии проверки. Найдена сумма всех чисел: 2 балла. Найдено $c=a+b+c-a-b=c+d+e-d-e=4$: 1 балл. Обосновано, что следующей по величине после $a+b+c$ будет $a+b+d$, а предпоследней по величине перед $c+d+e$ будет $b+d+e$: и найдены *b* и *d*: 2 балла. Нахождение *a* и *e*: 1 балл.

9.4. В турнире каждая из шести команд сыграла с каждой ровно по одному разу. В итоге команды набрали 12, 10, 9, 8, 7 и 6 очков соответственно. а) Сколько очков начислялось за победу в матче, если за ничью начислялось 1 очко, а за поражение — 0 очков? Ответом, естественно, должно быть натуральное число. б) Найдите количество выигрышей, ничьих и проигрышей у каждой команды и докажите единственность этих чисел. в) Приведите пример соответствующего турнира.

Ответ. а) 4 очка.

б) У первой команды было три победы, у второй — две победы и две ничьих, у третьей - две победы и одна ничья, у четвёртой — две победы, у пятой — одна победа и три ничьи, у шестой - — одна победа и две ничьи. Остальные матчи команды проиграли.

и) Один из примеров, удовлетворяющих условию, такой: первая команда выиграла у четвёртой, пятой и шестой, вторая — у первой и третьей, третья — у первой и шестой, четвёртая — у второй и третьей, пятая — у четвёртой, шестая — у четвёртой. При этом пятая команды сыграла вничью с шестой, третьей и второй, а также вничью сыграли шестая и вторая команды.

Решение. а) Пусть за победу в матче команде начислялось n очков, всего в турнире было сыграно 15 матчей, из которых x окончились победой одной из команд, а остальные $15-x$ - вничью. В ничейных матчах участники в сумме набирают 2 очка, а в остальных - n очков, поэтому всего в турнире всеми командами было набрано $nx+2(15-x)=(n-2)x+30=12+10+9+8+7+6=52$ очка, откуда $(n-2)x=22$. Всего игр было 15, поэтому x может равняться 1, 2 или 11. В первых двух случаях n равно 24 или 13, что превосходит максимальное количество очков, набранных командами, чего быть не может, так как победа в матче становится невозможной в принципе, значит все матчи окончатся вничью, что противоречит предположению о x . В оставшемся случае x равен 11, тогда n равно 4 — количество очков, начисляемое за победу.

б) Найдём количество выигрышей, ничьих и проигрышей у каждой команды. . Всего было четыре ничьих и 11 матчей, окончившихся победой одной из команд. Каждая команда провела по пять игр, поэтому 6 и более очков нельзя было набрать только за счёт ничьих, следовательно, шестая и пятая команды по разу выиграли и сделали по две и три ничьих соответственно.

Если бы четвёртая команда выиграла не более одного раза, у неё было бы не меньше четырёх ничьих, всего вместе с пятой и шестой было бы уже не меньше (2+3+4)/2=4,5 ничьих, что больше общих 4. Следовательно, четвёртая команда дважды выиграла и трижды проиграла.

В силу тех же соображений у третьей команды две победы и одна ничья, у второй — две победы и две ничьих. У всех команд, кроме первой, получаем не меньше (2+3+1+2)/2=4 ничьих, что равно их общему числу. Следовательно, у первой команды было три победы и два поражения.

в) Приведём пример соответствующего турнира. Пятая команда трижды сыграла вничью, а у первой и четвёртой — ничьих не было. Значит, пятая команды сыграла вничью с шестой, третьей и второй. Кроме этих ничьих, остаётся по одной у шестой и второй, поэтому они сыграли вничью между собой. Всё, ничьи закончились, и они восстанавливаются однозначно. А вот результативные матчи однозначно восстановить нельзя. Один из примеров, удовлетворяющих условию, такой: первая команда выиграла у четвёртой, пятой и шестой, вторая — у первой и третьей, третья — у первой и шестой, четвёртая — у второй и третьей, пятая — у четвёртой, шестая — у четвёртой.

Критерии проверки. Правильный и обоснованный ответ в пункте а): 3 балла. Найдено с обоснованием количество побед и ничьих у каждой команды: 2 балла. Приведён любой верный пример турнира в пункте в): 2 балла.

9.5. Найти все решения в целых числах уравнения: $x^3+y^3=2^{30}$ **.**

Ответ. $(0,2^{10}),(2^{10},0)$.

Решение. Покажем что, если x^3+y^3 равно степени двойки не ниже второй, то оба переменных должны быть чётными числами. Действительно, $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=2^n, n\geq 2$, если одно из переменных нечётно, то второе тоже, так как сумма их кубов чётна. В таком случае вторая скобка в разложении будет нечётным целым числом, делящим степень двойки, то есть, $x^2-xy+y^2=\pm 1$. Рассматриваем последнее равенство как квадратное уравнение относительно . x , если оно имеет решение, его дискриминант, равный $-3y^2\pm 4$ должен быть неотрицательным, что возможно только при $y=0,\pm 1$. При $y=0$ получим $x^2=\pm 1$, откуда $x=\pm 1$ При $y=1$ получим $x^2-x+1=\pm 1$, откуда $x=1,0$.При $y=-1$ получим $x^2+x+1=\pm 1$, откуда $x=-1,0$. При нечётных x,y получаются две пары значений: (1,1) и (-1,-1), для которых x^3+y^3 равно, соответственно, 2 и -2, поэтому подходит только первая пара (1,1) и . x^3+y^3 при это равно 2 — степени двойки ниже второй.

Рассмотри теперь исходное уравнение. Ввиду доказанного, обе переменных чётные, поделив всё уравнение на 8, получим новое уравнение в целых числах $\left(\frac{x}{2}\right)^3+\left(\frac{y}{2}\right)^3=2^{27}$, в котором правая часть снова является степенью двойки выше первой. Продолжая в том же духе, дойдём до уравнения $\left(\frac{x}{2^{10}}\right)^3+\left(\frac{y}{2^{10}}\right)^3=1$. Из решения уравнения $x^2-xy+y^2=\pm 1$ в предыдущей части с учётом $\left(\frac{x}{2^{10}}\right)^3+\left(\frac{y}{2^{10}}\right)^3=1$ для $\left(\frac{x}{2^{10,}}\frac{y}{2^{10}}\right)$ получаем (1,0) или (0,1), откуда (x,y) равно (x,y) или $(0,2^{10})$.

Критерии проверки. Только угаданы решения: 0 баллов. Показано, что, если x^3+y^3 равно степени двойки не ниже второй, то оба переменных должны быть чётными числами: 3 балла. Использована идея десяти делений значений переменных на 2: 3 балла. Решение уравнения $\left(\frac{x}{2^{10}}\right)^3+\left(\frac{y}{2^{10}}\right)^3=1$: 1 балл.