Решения заданий первого этапа Всесибирской открытой олимпиады школьников 2017-2018 г.г. по математике

Каждая задача каждого класса оценивается из 7 баллов

9 класс

9.1. Фирма получает яблочный и виноградный соки в одинаковых стандартных бидонах, а производит коктейль (смесь) из этих соков в одинаковых стандартных банках. В прошлом году одного бидона яблочного сока хватало на 6 банок коктейля, а одного бидона виноградного сока — на 10. В новом году пропорцию соков в коктейле (смеси) изменили и теперь стандартного бидона яблочного сока хватает на 5 банок коктейля. На сколько банок коктейля теперь хватает стандартного бидона виноградного сока?

Ответ. На 15 банок.

Решение. В прошлом году одного бидона яблочного сока хватало на 6 банок коктейля, значит каждая банка содержала 1/6 бидона яблочного сока. Аналогично, одного бидона виноградного сока хватало на 10 банок, значит, каждая банка содержала 1/10 бидона виноградного сока. Следовательно, ёмкость банки составляет 1/6+1/10=4/15 стандартного бидона. После изменения пропорции в новом году, каждая банка содержит 1/5 бидона яблочного сока, значит виноградного сока в ней стало 4/15 – 1/5 = 1/15 бидона. Следовательно, бидона виноградного сока теперь хватает на 15 банок коктейля.

Критерии проверки. Чёткое объяснение, что ёмкость банки равна 4/15 бидона: 3 балла.

За не исключение неправильного ответа при правильном решении и правильном ответе минус 2 балла.

За отсутствие пояснений от -2 до 0 баллов.

9.2. Известно, что $\frac{a^2 b^2}{a^4-2b^4}=1$. Найти все возможные значения выражения $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.

Ответ. $\frac{1}{3}$.

Решение. Умножим на знаменатель и преобразуем равенство в условии к виду $b^2\left(a^2+b^2\right)=a^4-b^4=\left(a^2+b^2\right)\left(a^2-b^2\right)$. При этом a, b не могут одновременно равняться нулю, иначе знаменатель дроби в условии обращается в 0. Следовательно, скобка a^2+b^2 тоже не равна нулю. Разделив на неё, получим $b^2=a^2-b^2$, откуда $a^2=2b^2$ (где a, b не равны 0). Подставив это выражение в дробь $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$, получим, что она равна $\frac{b^2}{3b^2}=\frac{1}{3}$.

Критерии проверки. Не обращается внимание на то, что происходит деление на выражение, которое может равняться нулю: снимаем 2 балла.

Если решено с помощью деления на b^2, не разбирая $b=0$, минус 2 балла, если при преобразовании выражено a^2 + 1 балл.

9.3. Точка M является серединой гипотенузы BC прямоугольного треугольника ABC, а точка P делит катет AC в отношении AP:PC = 1:2. Докажите, что величины углов PBC и AMP равны.

Доказательство. По свойству медианы к гипотенузе прямоугольного треугольника, треугольник AMC является равнобедренным. Отметим на катете AC точку T — середину отрезка PC, тогда длины отрезков AP,PT и TC равны. Следовательно, треугольника AMP и CMT равны по паре сторон AP=CT,AM=CM и углам MAP и MCT между ними, поэтому равны и их соответствующие углы AMP и CMT. Теперь заметив, что T- середина CP и M — середина CB, из теоремы, обратной теореме Фалеса, получаем параллельность прямых MT и BP, и равенство углов PBC и CMT, последний из которых равен AMP, что и требовалось доказать.

Критерии проверки. Доказана равнобедренность треугольника AMC: 1 балл. Доказано равенство треугольников AMP и CMT: 2 балла. Замечено равенство углов AMP и CMT: 1 балл. Доказана параллельность прямых MT и BP: 2 балла. Доказано равенство углов PBC и CMT: 1 балл.

9.4. Можно ли в некоторых клетках шахматной доски 8 на 8 поставить по одной фишке так, чтобы число фишек в любых двух соседних горизонталях отличалось в 3 раза, а в любых двух соседних вертикалях — в 4 раза? Хотя бы одна фишка на доске должна быть.
Ответ. Нет.
Решение. Горизонталь или вертикаль доски 8 на 8 не может содержать больше 8 фишек, поэтому минимальное число фишек в горизонтали равно 1 или 2, в противном случае в одной из соседних с минимальной горизонталей будет не меньше 9 фишек. Из условия легко следует, что в первом случае горизонтали содержат 1,3,1,3,1,3,1,3 или 3,1,3,1,3,1,3,1 фишек, а во втором — 2,6,2,6,2,6,2,6 или 6,2,6,2,6,2,6,2 фишек, то есть всего 16 или 32 фишки. Разобьём вертикали на пары соседних, по условию, число фишек в каждой паре соседних вертикалей делится на 5. поэтому и общее число фишек на доске должно делиться на 5, однако 16 и 32 не делятся на 5 — противоречие.
Критерии проверки. Чёткое обоснование того, что горизонтали содержат 1,3,1,3,1,3,1,3 либо 2,6,2,6,2,6,2,6 фишек: 3 балла. Чёткое обоснование того, что общее число фишек на доске должно делиться на 5: 3 балла. Получение противоречия: 1 балл.
Решения, где выражение «в 3 раза» понимается, как «хотя бы в три раза», или «не больше, чем бы в три раза»: не рассматриваются.

9.5. При каком минимальном n в любом множестве из n различных натуральных чисел, не превосходящих 100, найдутся два, сумма которых является простым числом?
Ответ. n=51.
Решение. Сумма двух чётных натуральных чисел всегда чётна и больше двух, следовательно, не может быть простым числом. Поэтому пример множества из всех пятидесяти чётных чисел, не превосходящих 100 показывает, что минимальное n не меньше 51.
С другой стороны, разобьём все натуральные числа от 1 до 100 на 50 пар, сумма чисел в каждой из которых равна простому числу 101: 1 и 100, 2 и 99, …, 50 и 51. Если в выбранном множестве не меньше 51 числа, то, по принципу Дирихле, хотя бы два из них попадут в одну пару, и их сумма будет простым числом.
Критерии проверки. Пример, показывающий, что n больше 50: 2 балла. Доказательство того, что в любом множестве из 51 различных натуральных чисел, не превосходящих 100, найдутся два, сумма которых является простым числом: 5 баллов.
Идея примера, но он не приведен явно +1 балл.