Решения заданий заключительного этапа Всесибирской открытой олимпиады школьников 2017-2018 г.г. по математике

Каждая задача каждого класса оценивается из 7 баллов

9 класс

9.1. На какое максимальное число различных прямоугольников можно разрезать шахматную доску 8 на 8 клеток? Все разрезы должны проходить только по линиям сетки. Прямоугольники различны, если они не равны как геометрические фигуры.

Ответ. На 12.

Решение. Выпишем возможные размеры возможных различных целочисленных прямоугольников минимальных площадей, помещающихся по линиям сетки на доску 8 на 8 в порядке возрастания этих площадей: 1 на 1, 1 на 2, 1 на 3, 1 на 4, 2 на 2, 1 на 5, 1 на 6, 2 на 3, 1 на 7, 1 на 8, 2 на 4, 3 на 3, 2 на 5. Прямоугольников уже 13 и сумма их площадей равна 73, что больше площади доски. Значит больше, чем на 12 прямоугольников, разрезать доску требуемым в задаче образом нельзя.

С другой стороны, сумма площадей их всех, кроме 3 на 3, равна ровно 64 и можно указать пример такого разбиения на все эти 12 прямоугольников, кроме 3 на 3: первые четыре вертикали доски разрежем на полоски ширины 1 и длин 1 и 7, 2 и 6, 3 и 5, и 8 соответственно. Оставшиеся 4 вертикали разобьём на два вертикальных прямоугольника 2 на 7, составленных из прямоугольников 2 на 5 и 2 на 2, и 2 на 4 и 2 на 3. Сверху к ним добавим горизонтальную полоску 1 на 4.

Возможны и другие примеры такого разбиения.

Критерии проверки. Доказано, что количество прямоугольников разбиения не превосходит 12: 4 балла. Приведён верный пример для 12 прямоугольников: 3 балла.

9.2. Могут ли в некотором остроугольном треугольнике ABC точки пересечения биссектрисы угла A, высоты, проведённой из вершины B и медианы, проведённой из вершины C являться вершинами невырожденного равностороннего треугольника?

Ответ. Нет.

Решение. Обозначим точку пересечения биссектрисы угла A и высоты BK из вершины B за M, высоты из вершины B и медианы из вершины C - за P, биссектрисы угла A и медианы из вершины C - за T. Предположим, что все эти точки различны и являются вершинами равностороннего треугольника MPT. Тогда величина угла AMK равна величине угла PMT и равна 90 минус величину угла A, откуда величина A равна 60 градусов. Опустим высоту CE, она пересечёт BK в точке O и величина угла EOK будет равна 120 градусов, так как четырёхугольник AEOK — вписанный. Следовательно, угол между прямыми BK и CE равен 60 градусов, но и угол между прямыми BK и CP по построению тоже равен 60 градусов. Таким образом, прямые CE и CP параллельны и проходят через вершину C, следовательно, совпадают, значит медиана и высота треугольника из вершины C совпадают и он является равнобедренным с BC=AC. Величина угла A, как мы установили, равна 60 градусов, значит и остальные углы треугольника ABC тоже по 60 градусов, он является равносторонним и точки P,M и T в нём совпадают, что противоречит предположению о нетривиальности треугольника PMT.

Критерии проверки. Установлено, что величина A равна 60 градусов: 2 балла. Доказана равнобедренность ABC: 3 балла. :За полное рассмотрение только одной (из двух возможных) конфигурации точек P,M и T баллы не снимаем.

9.3. Пусть двузначные числа $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$ таковы, что отношение четырёхзначного числа $\overline{abcd}$

к сумме $\overline{ab}+\overline{cd}$ является целым числом. Найти все возможные значения, которые может принимать это число.
Ответ. Все натуральные числа от 11 до 90 включительно.
Решение. Обозначим искомое в условии отношение за n, а числа $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$ за A и C соответственно. Тогда $\overline{abcd}=100\cdot A+C=n(A+C)$, откуда $\frac{100-n}{n-1}=\frac{C}{A}$. Заметим, что $C\le 99, A\ge 10$, следовательно $\frac{100-n}{n-1}\le\frac{99}{10}$, откуда $n\ge\frac{1099}{109}$, то есть $n\ge 11$. Аналогично, $C\ge 10, A\ge 99$, следовательно $\frac{100-n}{n-1}\ge\frac{10}{99}$, откуда $n\le\frac{9910}{109}$, то есть $n\le 90$.
С другой стороны, для любого натурального n из интервала от 11 до 90 положив $C=100-n.\ A=n-1$, получим два двузначных числа, для которых отношение из условия которых будет в точности равно n.
Критерии проверки. Оценки $n\ge 11$ и $n\le 90$: каждая по 2 балла. Построение примера для всех натуральных чисел от 11 до 90: 3 балла. Если примеры приведены не для всех натуральных чисел от 11 до 90, но для 11 и 90 примеры есть: 2 балла.. Любое остальное количество частных примеров: 1 балл.

9.4. Известно, что значения квадратного трёхчлена ax^2+bx+c на интервале $[-1,1]$ не превосходят по модулю 1. Найти максимальное возможное значение суммы $|a|+|b|+|c|$.
Ответ. 3.
Решение. Подставляя в многочлен ax^2+bx+c последовательно значения $x=0,1,-1$ из интервала $[-1,1]$, получим три неравенства: $-1\le c\le 1$, $-1\le a+b+c\le 1$ и $-1\le a-b+c\le 1$ Складывая второе с третьим, получим также $-1\le a+c\le 1$, вычитая второе из третьего (они двойные и симметричные!), имеем $-1\le b\le 1$. Вычитая из $-1\le a+c\le 1$ неравенство $-1\le c\le 1$, получим $-2\le a\le 2$. В силу симметрии условия задачи относительно умножения на -1, можем считать коэффициент a положительным. Если $b,c\ge 0$, то $|a|+|b|+|c|$ = $a+b+c\le 1$ по доказанному. Если $b<0, c\ge 0$, то $|a|+|b|+|c|$ = $a-b+c\le 1$, по доказанному. Если $b\ge 0, c<0$, то $|a|+|b|+|c|$ = $a+b-c=(a+b+c)-2c\le 1+2=3$. Если $b,c<0$, то $|a|+|b|+|c|$ = $a-b-c=(a-b+c)-2c\le 1+2=3$. Таким образом, сумма $|a|+|b|+|c|$ в условиях задачи не превосходит 3.
Значение 3 достигается, например, на многочлене $f(x)=2x^2-1$: его минимальное значение достигается внутри интервала в вершине параболы при $x=0$, максимальные значения достигаются на концах интервала при $x=1,-1$.
Критерии проверки. Найдены только границы коэффициентов уравнения и их сумм из предложений 1-3: 2-3 балла. Доказана оценка $|a|+|b|+|c|\le 3$: 5 баллов. Приведён и обоснован пример, когда эта граница достигается: 2 балла. Если пример приведён без обоснования: минус 1 балл. Любая неверная граница: 0 баллов.

9.5. Какое наибольшее количество целых чисел можно записать в ряд так, чтобы сумма любых пяти подряд идущих из них была больше нуля, а сумма любых семи подряд идущих из них была меньше нуля?
Ответ. Десять.
Решение. Сумма любых семи записанных чисел отрицательна, а сумма пяти крайних из этой семёрки = положительна, значит сумма двух крайних левых и сумма двух крайних правых чисел из этой семёрки — отрицательны. Поэтому сумма любых двух соседних чисел, справа или слева от которых есть ещё хотя бы пять чисел, отрицательна..

Значит, если предположить, что выписано больше десяти чисел, то сумма любых двух соседних чисел отрицательна.
В каждой пятёрке подряд идущих чисел сумма всех положительна, а сумма двух пар соседних — отрицательна, поэтому крайние и среднее числа каждой пятёрки — положительны . Если чисел хотя бы девять (а тем более одиннадцать), то каждое из них будет крайним в некоторой пятёрке, значит все выписанные числа будут положительны, что противоречит условию отрицательности сумм семёрок. Таким образом, выписанных чисел не больше десяти.
Построим пример для десяти чисел. Из предыдущих рассуждений следует, что числа с номерами 1,3,5,6,8,10 должны быть положительны, а остальные — отрицательны. Допустим, что все положительные числа равны x , а все отрицательные числа равны $-y$. Сумма любых пяти подряд будет равна $3x-2y>0$, а сумма любых семи подряд будет равна $4x-3y<0$, откуда $\frac{4}{3}x<y<\frac{3}{2}x$. Можно взять, например $x=5, y=7$, тогда искомый пример будет таким:5,-7,5,-7,5,5,-7,5,-7,5.
Критерии проверки. Замечено, что сумма двух крайних слева и сумма двух крайних справа чисел из этой семёрки — отрицательны:1 балл. Замечено, что если чисел больше десяти, то сумма любых двух соседних чисел отрицательна: 2 балла. Замечено, что крайние и среднее числа каждой пятёрки — положительны 1 балл. Замечено, что если чисел хотя бы одиннадцать, то все числа будут положительны: 1 балл. Любой верный пример для десяти чисел: 2 балла.