Решения и критерии проверки задач Второго этапа Всесибирской олимпиады школьников 2017-2018 г.г. по математике 8 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

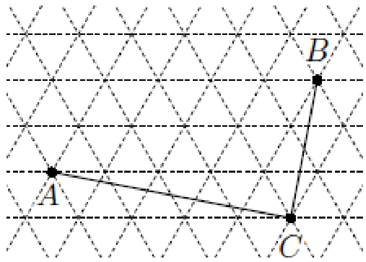
8.1. Опытный фрезеровщик Гарик умеет делать распилы. За один день непрерывной работы он распиливает 600 девятиметровых брёвен на одинаковые трёхметровые брёвнышки (от исходных они отличаются только длиной). Сколько времени понадобится опытному фрезеровщику Гарику, чтобы распилить 400 двенадцатиметровых брёвен (от девятиметровых они отличаются только длиной) на такие же трёхметровые брёвнышки?

Ответ: один день
Решение: чтобы превратить 9-метровое бревно в 3 трёхметровых, надо сделать 2 распила. Поэтому Гарик делает 2*600 = 1200 распилов в день. Чтобы превратить 12-метровое в 3-метровые, надо сделать 3 распила, а для 400 брёвен - 400*3 =1200, то есть понадобится столько же времени.
Критерии: только ответ – 1 балл.

8.2. Раз в месяц дядька Черномор собирает всех своих 33 богатырей и предлагает им проголосовать за новый список зарплат, который сам и составляет. Сам Черномор не голосует. Те богатыри, чьё жалование предлагается увеличить, голосуют за, остальные – против. Предложение принимается большинством голосов. Может ли Черномор за 3 года добиться того, чтобы его жалованье вдесятеро увеличилось, а зарплаты всех богатырей вдесятеро уменьшились?

Ответ: да, может
Решение: Пусть первые 33 месяца Черномор предлагает одному из богатырей сделать зарплату, равную 0, а остальным – увеличивать на одну тысячную от их исходной зарплаты. Все эти предложения будут приняты. После этого у всех богатырей зарплата будет не более 33/1000 от исходной, т.е. меньше 1/10.
На 34 месяц Черномор предложит всем богатырям зарплату, равную 1/10 от их изначальной, а свою увеличит в 10 раз, и за это предложение все проголосуют за.
Критерии: только ответ – 0 баллов.
Задача решена в предположении, что богатыри голосуют за, если им не меняют зарплату – 3 балла.
Любой верный алгоритм – 7 баллов.

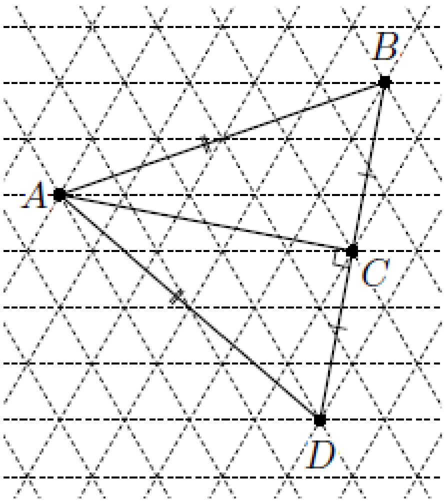
8.3. Найдите угол *ACB*, изображённый на картинке, если известно, что все треугольники, нарисованные пунктирными линиями, равносторонние.

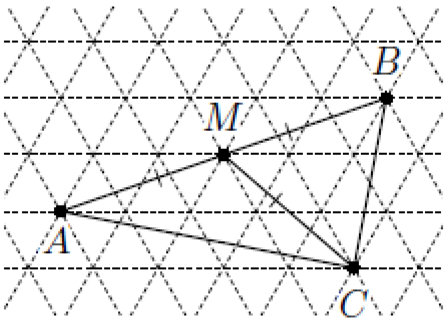


Ответ: 90 градусов

Решение: Будем считать, что сторона маленького правильного треугольника равна 1.

Решение 1. Продлив отрезок *BC* на его длину за точку *C*, получим точку *D* (рис. слева). Проведя отрезки *AD* и *AB*, заметим, что они равны (так как это диагонали в равных параллелограммах со сторонами 2 и 4), то есть треугольник *ABD* – равнобедренный. Так как *AC* – медиана этого треугольника, проведённая к его основанию, то *AC* – высота, то есть угол *ACB* = 90°.
Решение 2. Рассмотрим треугольник *ABC*. Пусть *M* – середина *AB* (рис. справа). Заметим, что *AM* = *BM* = *CM* как диагонали параллелограммов со сторонами 1 и 2, то есть медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена. Значит, треугольник *ABC* – прямоугольный: угол *ACB* = 90°.





Критерии: только ответ – 0 баллов.

8.4. Найдите все решения уравнения $4[x] = 25\{x\} - 4{,}5$. Здесь $[x]$ означает целую часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее числа x, а $\{x\}$ есть дробная часть числа x, равная по определению $x - [x]$.

Ответ: $x = k + (8k + 9)/50$ для $k = -1,0,...,5$ – всего 7 дробей.
Решение: домножим уравнение на 2 и преобразуем. Получим уравнение $8[x] + 9 = 50\{x\}$. Заметим, что справа стоит неотрицательное число, и оно не больше 50, то есть $0 \le 8[x] + 9 \le 50$, откуда $-9/8 \le [x] \le 41/8$. Но $[x]$ – целое число, поэтому оно может быть равно только -1,0,1,2,3,4 или 5. Поэтому $x = [x] + \{x\} = [x] + (8[x] + 9])/50$, то есть ответ можно записать в виде $x = k + (8k + 9)/50$ для $k = -1,0,...,5$.
Комментарий: случай $k = -1$ подходит, так как у дроби -49/50 целая часть по определению равна -1, а дробная, тоже по определению, равна -49/50 - (-1) = 1/50.
Критерии: получено только неравенство $-9/8 \le [x] \le 41/8$ - 2 балла.
Ответ не записан явно, оставлен в виде формулы как в решении – баллы не снимать.
Потерян случай $k = -1$ – минус 1 балл.
Потерян любой другой случай – минус 2 балла.
Потеряно два любых случая для $k > 0$ – ставить не более 3 баллов за решение.

8.5. В комнате Насти собралось 16 человек, каждые двое из которых либо дружат, либо враждуют. Приходя в комнату, каждый из них на двери комнаты записывал количество уже пришедших друзей, а уходя – количество оставшихся в комнате врагов. Чему может равняться сумма всех записанных чисел, после того, как сначала все пришли, а затем все разошлись?

Ответ: 120
Решение: Рассмотрим любую пару друзей. Их “дружба” была посчитана ровно один раз, так как её в свою сумму включает тот человек, что пришёл позже своего друга. Поэтому после того,

как все пришли, сумма чисел на двери будет равна общему количеству дружб между людьми. Аналогично, каждая “вражда” будет посчитана ровно один раз тем человеком, что ушёл раньше. Поэтому после того, как все уйдут, к сумме чисел на двери прибавится сумма всех “вражд”. Итого, общая сумма чисел на двери будет равна сумме общему количеств дружб и вражд, а это в точности количество пар пришедших людей, т.е. 16*15/2 = 120.

Критерии: только ответ – 0 баллов.