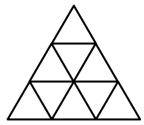
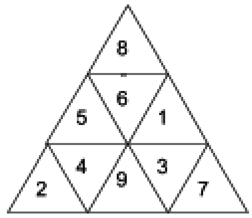
Решения и критерии проверки задач Первого этапа
Всесибирской олимпиады школьников 2017-2018 г.г. по математике
8 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

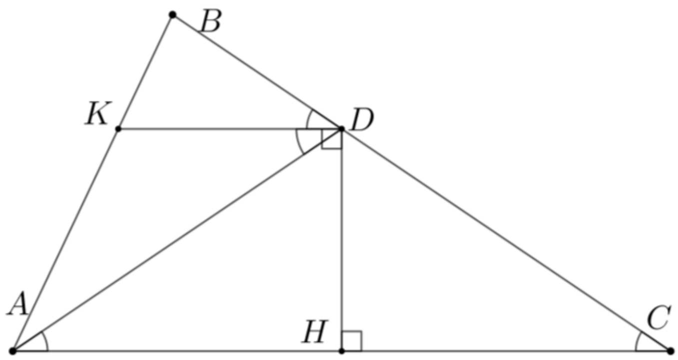


8.1. Правильный треугольник со стороной 3 разбит на 9 треугольников со стороной 1 так, как изображено на рисунке. Расставьте в этих треугольниках числа от 1 до 9 (каждое ровно 1 раз), чтобы сумма чисел в любом правильном треугольнике со стороной 2 была одной и той же.
Решение: Например, так, как показано на рисунке.
Критерии: Любой пример, даже без проверки – 7 баллов.



8.2. Однажды утром в 9:00 из деревни Федино в деревню Нововерандово вышел пешеход Федя. Одновременно навстречу ему из Нововерандово выехала велосипедистка Вера. Известно, что до момента встречи Федя успел пройти треть пути между деревнями, однако, если бы Федя вышел на час раньше, то успел бы пройти до встречи половину пути. В какое время Федя и Вера встретились? Скорости Веры и Феди постоянны.
Ответ: 10:20
Решение 1: Поймём, что если Федя прошёл какое-то расстояние до выезда Веры, то с момента, как выедет Вера, до встречи он пройдёт треть оставшегося пути. Тогда получаем, что середина всего пути - это треть оставшегося, то есть Федя за час прошёл одну четверть всего пути. Из первого условия понятно, что скорость Веры в два раза больше, т.е. Федя и Вера вместе проходят 3/4 пути за час, а значит, всего им понадобится 4/3 часа, чтобы встретится.
Решение 2: Обозначим скорость Феди за U, скорость Веры за V, расстояние между деревнями будем считать равным 1. Тогда из первого условия получаем, что $V = 2U$.
Второе интерпретируем так: сначала Федя прошёл 1 час со скоростью U, а затем с той же скоростью U, но $(1 - U) : (U + V)$ часов (расстояние делим на скорость сближения), а в сумме прошёл 1/2 пути. То есть, $U + U(1 - U) : (U + V) = 1/2$, откуда $U = 1/4$, а дальше как в первом решении.
Критерии: только ответ, ответ с проверкой - 1 балл.
Получено, что $V = 2U$ - ещё плюс балл.
Найдено, что за один час ребята проходят вместе 3/4 пути, дальнейших продвижений нет – 5 баллов.

8.3. Дан треугольник ABC, в котором выбраны точка D на стороне BC и точка H на стороне AC. Кроме того проведена DK – биссектриса треугольника BDA. Оказалось, что углы CHD и HDK прямые. Найдите HC, если $AC = 2$.
Ответ: $HC = 1$.



Решение: Так как углы CHD и HDK прямые, то прямая KD параллельна прямой AC. Тогда углы HAD и ADK равны как накрест лежащие, а углы DCA и BDK - как соответственные. Но DK биссектриса, поэтому углы DAC и DCA равны, следовательно, треугольник ADC равнобедренный, HD - высота в равнобедренном треугольники, а значит и медиана. Поэтому $HC = AC/2 = 1$.
Критерии: только ответ - 0 баллов.
Доказано, что прямые KD и AC параллельны - 1 балл.
доказано, что ADC равнобедренный или что DH биссектриса — 4 балла.

8.4. У Всеволода есть 20 одинаковых квадратов: один белый, а остальные чёрные. Всеволод расположил белый квадрат на столе и собирается закрыть его 19-ью чёрными так, чтобы стороны всех чёрных были параллельны сторонам белого (чёрные квадраты могут пересекаться). Ярослав утверждает, что как бы Всеволод не справился с этой задачей, всегда можно будет убрать один чёрный так, что белый квадрат всё равно будет покрыт чёрными полностью. Прав ли Ярослав? Ответ обоснуйте.

Ответ: нет.

Решение: Будем считать, что каждый квадрат имеет размеры 10x10, мысленно поделим их все на маленькие квадратики 1x1. Выделим в белом квадрате диагональ из 10 квадратиков, идущую из нижнего левого края в верхний правый. Назовём эту диагональ A. Диагональ сразу над ней состоит из 9 квадратиков, назовём её $Б$.

Расположим теперь чёрные квадраты следующим образом: 10 из них положим так, чтобы их верхний левый квадратик совпадал с одним 10 квадратов диагонали A (для разных чёрных квадратов разные квадратики). Оставшиеся 9 квадратов положим так, чтобы их нижний правый квадратик совпал с одним из квадратиков $Б$. Очевидно, что весь белый квадрат будет накрыт, причём любая клетка из A или $Б$ накрыта ровно одним чёрным квадратом, поэтому никакой чёрный квадрат убрать не получится.

Критерии: правильный пример без обоснования - 5 баллов.

8.5. В школе прошёл турнир по перетягиванию одеяла, состоявший из нескольких раундов. В каждом раунде участвовали две команды, состоящие из ненулевого количества школьников, причём, конечно, человек не мог быть в обеих командах сразу. После турнира выяснилось, что каждая возможная команда, которую можно составить из учащихся этой школы (кроме команды, состоящей из всех людей сразу), участвовала ровно в одном раунде турнира. Докажите, что в таком случае в каждом раунде соревновались в точности все школьники.

Решение 1: Назовём две команды дополнительными, если одна из них состоит из всех учеников, не вошедших в другую. Каждый ученик школы входит только в одну из двух дополнительных команд, следовательно, он входит ровно в половину всех команд. Но половина числа всех команд равна числу всех раундов. Таким образом, число раундов совпадает с числом выступлений каждого ученика, а значит, в каждом раунде выступать все ученики, то есть две дополнительные команды.

Решение 2: Утверждение, которое требуется доказать, эквивалентно тому, что в каждом раунде команды соревновались с командами, состоявшими из всех остальных учащихся школы. Пусть в школе N людей.

Рассмотрим любую команду, состоящую ровно из N-1 человека. Так как она против кого-то играла, то в точности против оставшегося человека, который в неё не входит. Заметим, что тогда любого одиночного человека придётся поставить к кому-то и свободных не останется. Таким образом, все команды из 1 и N-1 человека разобьются на пары, игравших друг против друга.

Рассмотрим теперь любую команду, состоящую из N-2 людей. Она играла либо против 1, либо против 2 человек. Но все одиночные люди уже “разобраны”, поэтому против 2, но тогда в точности против тех, кого среди этих N-2 нет. Заметим, что все пары людей какой-то команде из N-2 придётся поставить в соответствие, и свободных пар не останется. Таким образом, все команды из 2 и N-2 тоже разобьются на пары.

Продолжая рассуждения, получим, что все команды разобьются таким образом. Заметим, что если N чётно, то это ничему не противоречит, так как мы просто придём к тому, что все команды из N/2 людей должны играть с командами из N/2 людей, так как других свободных команд не осталось. Но тогда они обязаны дополнять друг друга.

Критерии: замечено только, что N-1 и 1 разбиваются на пары - 2 балла.

Не разобран случай чётного N, если для него требуется отдельное рассуждение - минус 1 балл.