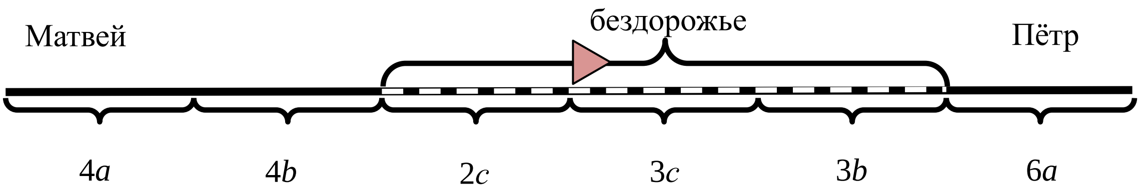
Решения и критерии проверки задач Заключительного этапа Всесибирской олимпиады школьников 2017-2018 г.г. по математике
8 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

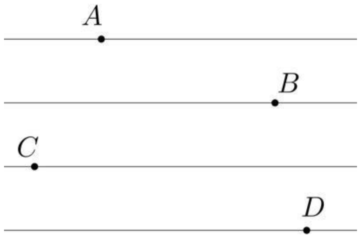
8.1. Число называется хорошим, если любые две соседние цифры в его записи отличаются хотя бы на 4. Вера написала некоторое хорошее число, а потом заменила одинаковые его цифры на одинаковые буквы, а разные – на разные. Могло ли у неё получиться слово НОВОСИБИРСК?
Ответ: Могло, например, подойдёт число 82729161593 (Н = 8, О = 2, В = 7, С = 9, И = 1, Б = 6, Р = 5, К = 3).
Критерий: любой подходящий пример без проверки – 7 баллов.

8.2. Матвей вышел из Тотьмы, а одновременно с ним Пётр выбежал навстречу из Калуги по той же дороге. В одинаковых условиях скорости мальчиков относятся как 2 : 3 и постоянны. В какой-то момент на их пути начинается бездорожье (возможно, в различное время) и продолжается до самого момента встречи. На бездорожье скорость каждого падает в два раза. Как относятся расстояния, пройденные по бездорожью Петром и Матвеем, если они встретились ровно посередине между городами, а бездорожье составляет 2/3 пути между Калугой и Тотьмой?
Ответ: Расстояния, пройденные по бездорожью Матвеем и Петром, относятся как 1 : 3.
Решение: Если бы бездорожья на стороне Матвея было бы больше или столько же, сколько у Петра, то скорость Петра всегда бы была больше, встреча бы не могла бы произойти посередине пути. Значит, Пётр шёл по бездорожью дольше.
Пусть Пётр шёл до бездорожья $6a$ километров, тогда Матвей за это время прошёл – $4a$ километров. Потом Пётр проходит $3b$ километром, до момента, когда Бездорожье не начнётся у Матвея. Матвей за это время проходит $4b$. Затем до встречи Пётр проходит $3c$, а Матвей – $2c$.

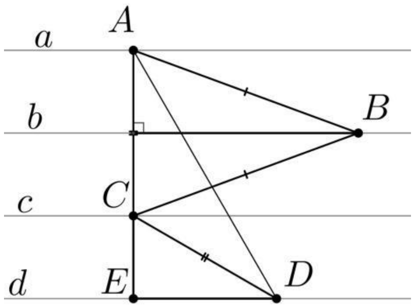


Итак, с одной стороны: $4a + 4b + 2c = 6a + 3b + 3c$, так как встреча произошла на середине пути.
С другой стороны, так как бездорожье составляет 2/3 всего пути, то: $(5c + 3b) : (10a + 7b + 5c) = 2/3$.
Из первого уравнения получаем, что $b = 2a + c$.
Из второго:
$15c + 9b = 20a + 14b + 10c$
$5c = 5b + 20a$
$c = b + 4a$
Подставив второй результат в первый, получим:
$b = 2a + c = 2a + b + 4a = 6a + b$
$0 = 6a$
Таким образом, для Петра бездорожье началось сразу, а значит, он шёл всю свою часть пути по бездорожью, а Матвею надо было пройти только 2/3 – 1/2 = 1/6 пути по бездорожью. Таким образом, расстояния пройденные по бездорожью Матвеем и Петром относятся как 1 : 3.
Критерии: Верно составлена система уравнений – 3 балла. Только ответ – 0 баллов. Ответ с проверкой – 2 балла.

8.3. Найдите угол *DAC*, если известно, что *AB* = *BC* и *AC* = *CD*, а прямые, на которых лежат точки *A*, *B*, *C*, *D*, параллельны, причём расстояния между соседними прямыми равны. Точка *A* левее *B*, *C* левее *B*, *D* правее *C* (см.рис).



Ответ: 30 градусов.



Решение: Назовём прямую, на которой лежит точка *B* – *b*, на которой лежит точка *C* – *c*, на которой лежит точка *D* – *d*.

Пусть прямая *AC* пересекает прямую *b* в точке *M*. По теореме Фалеса, *AM* = *MC*, так как расстояния между параллельными прямыми равны. Значит, *BM* – медиана в равнобедренном треугольнике *ABC*. Значит, *BM* – ещё и высота, то есть угол *AMB* – прямой, так как прямые *b* и *c* параллельны, то *AC* перпендикулярна прямой *c*. Пусть *AC* = 2*x*, тогда расстояния между параллельными прямыми равно *x*. Продлим *AC* до пересечения с прямой *d* в точке *E*. Тогда *CE* = *x*, как расстояние между параллельными прямыми, *CD* = 2*x*, так как *AC* = 2*x*. Кроме этого, в треугольнике *CED* угол *E* – прямой. Итак, в прямоугольном треугольнике *CED* гипотенуза в два раза больше одного из катетов. Значит, угол *ECD* равен 60 градусам, а смежный с ним угол *ACD* равен 120 градусам. Тогда в равнобедренном треугольнике *ACD* два острых угла равны по 30 градусов.

Критерии: Доказано, что *AC* перпендикулярна прямой *c* – 2 балла.

8.4. Дядя Андрей и девочка Маша играют в игру. У них имеются две упаковки сока по 24 литра: один грушёвый, другой вишнёвый. Кроме того, у Андрея есть кружка в 500 мл, а у Маши – две кружки по 240 мл. Игроки пьют сок по очереди по следующим правилам: они наполняют все свои кружки до краёв, а затем выпивают налитое до дна. При этом запрещается смешивать два вида сока в одной ёмкости. Если кто-то не может сделать ход, то ходит его соперник. Игра заканчивается, когда никто не может сделать ход. Побеждает тот, кто выпил больше сока. Может ли кто-либо обеспечить себе победу, если Андрей выбирает, кто ходит первым?

Ответ: нет, не может.

Решение: докажем, что Андрей может выпить 24 литра сока, как бы ни действовала Маша, и покажем, что Маша может ходит так, что тоже выпьет ровно половину.

Предположим, Андрей смог сделать не более 47 ходов, тогда Маша сделала не более 49 ходов. Тогда на данный момент выпито не более 47*500+49*480 = 47020, то есть не выпито хотя бы 980 мл сока. С другой стороны, так как объёмы всех ёмкостей делятся на 20, то и количество оставшегося сока в каждой упаковке делится на 20. Если Андрей не может сделать ход, то оно не превосходит 480 мл в каждой упаковке, но тогда сока осталось не более 960 мл. Значит, Андрей при любых обстоятельствах сможет сделать 48 ходов.

Докажем, что Маша тоже может выпить 24 литра сока, как бы ни действовал Андрей.

Пусть Маша ходит второй и повторяет ходы Андрея. Тогда за одну пару ходов они выпивают 980 мл из упаковки, и после 24 ходов в этой упаковке останется 480 мл сока, которые Андрей выпить не может, а Маша может. За 24 хода Маша выпивала на каждом на 20 мл меньше, чем Андрей, т.е. в итоге выпила на 480 меньше, что компенсирует, допивая последнее из этой пачки. Таким образом, если она ходит второй, то может выпить по крайней мере половину всего.

Если она ходит первой, то пусть первым ходом выпивает из каждой пачки по 240 мл, а затем повторяет ходы. Аналогичными рассуждениями, в каждой пачке в конце остаётся 240 мл (если в

какой-то больше, то Андрей пока ещё ходит туда), что Маша допьёт и компенсируем разницу в выпитом до нуля.
Значит, никто не может обеспечить себе победу.
Критерии:
Стратегия только для одного человека -- не более 3 баллов.
Потерян один случай в стратегии (например, не рассмотрено, что происходит, если Маша ходит первой) при полном решении -- 5 баллов,
Потерян один случай в стратегии при том, что есть только стратегия за Машу -- 2 балла.

8.5. В большом вольере живёт сто попугайчиков. В некоторый момент оказалось, что каждый из них за свою жизнь клюнул ровно пять других попугайчиков из этого вольера. Докажите, что можно выпустить на волю десять таких попугайчиков, что никто из них друг друга не клевал.
Решение: Докажем для начала, что найдётся попугайчик, которого клюнули не более 5 раз. Действительно, предположим, что все попугайчики были клюнуты хотя бы 6 раз. Тогда всего клюнутым кто-то оказывался хотя бы 100*6 = 600 раз, однако, клюнувшим кто-то оказывался 5*100=500 раз. Очевидно, что число раз, когда кто-то оказывался клюнутым, равно числу раз, когда кто-то кого-то клевал, откуда приходим к противоречию – с одной стороны это число больше 600, с другой - ровно 500. Значит, действительно найдётся попугайчик, которого клюнули не более 5 раз. Назовём его Кешей-1.
Теперь Кешу-1 выпустим на волю, а всех клюнутых Кешей-1 и клюнувших Кешу-1 переселим в другой вольер. Всего переселенных окажется не более 10, т.к. клюнул Кеша-1 ровно пятерых, а его клюнуло не более 5. Всего в вольере останется хотя бы 89 попугайчиков, так как выкинем мы максимум 11.
Пусть осталось n попугайчиков. Заметим, что теперь снова найдётся попугайчик Кеша-2, который оставшимися был клюнут не более 5 раз. Иначе, с одной стороны, клевков хотя бы $6n$ (каждого клюнули 6 или более раз), а с другой, не более $5n$ (каждый клевал максимум пятерых из оставшихся). Выпустим на волю Кешу-2, а клюнутых и клюнувших его отсадим в другой вольер. Мы снова избавимся максимум от 11 птиц, и их останется хотя бы 78.
Повторим операцию ещё раз – птиц останется хотя бы 67. После четвёртого раза – хотя бы 56, после 5-ого – хотя бы 45, после 6-ого – хотя бы 34, после 7-ого – хотя бы 23, после 8-ого – 12, наконец, после 9-ого раза останется хотя бы одна птица, а значит и в 10-ый раз нам будет кого выпустить. Мы выпустим требуемое количество попугайчиков, из которых никто никого не клевал (иначе бы был отсажен в другой вольер ранее).
Критерии: не доказано строго, что изначально найдётся попугайчик, которого клюнули не более 5 раз – минус 1 балл.
Не доказано, что после выкидывания такой попугайчик всё равно найдётся (например, рассмотрен только первый шаг, а затем сказано “и так далее”) – не более 3 баллов
“Грязь” в решении, которая не влияет на ответ (например, утверждается, что что будет выкинуто ровно 11 попугайчиков, или что после выкидывания каждый всё равно клюёт ровно пятерых оставшихся) – минус 1 балл.
Замечено только, что Кеша найдётся (первый абзац решения) – 1 балл.
Замечено только, что Кеша найдётся, и можно выкинуть максимум 11 птиц (первые 2 абзаца) – 2 балла.