Решения и критерии проверки задач Второго этапа Всесибирской олимпиады школьников 2017-2018 г.г. по математике
7 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

7.1. Егор, Никита и Иннокентий получили за три контрольные работы каждый по три оценки, причём все оценки оказались тройками, четвёрками и пятёрками. Егор сказал: “У меня за две контрольные оценки больше, чем у Никиты.” Никита ответил: “Зато у меня за две контрольные оценки лучше, чем у Иннокентия.” Иннокентий парировал: “А я две контрольные написал лучше, чем Егор”. Могли ли все мальчики сказать правду?

Ответ: да, могли
Решение: Пусть Егор получил оценки 5,4,3; Никита – 4,3,5; Иннокентий – 3,5,4. Тогда условие задачи выполнено.
Критерии: только ответ – 0 баллов.
любой верный пример без проверки – 7 баллов.

7.2. Антон Павлович на свой день рождения испёк хлеб и позвал в гости Владимира Алексеевича и Фёдора Алексеевича. Оказалось, что хлеб и Фёдор вместе весят столько же, сколько Антон и Владимир. После того, как хлеб съели, вес Владимира стал равен суммарному весу Антона и Фёдора. Докажите, что кусок хлеба, съеденный Владимиром, весит столько же, сколько весил Антон до своего дня рождения.

Решение: Пусть Антон до дня рождения весил А, Владимир – В, Фёдор – Ф, и они съели куски хлеба весами ХА, ХВ, ХФ соответственно. Тогда из первого условия получаем уравнение ХА + ХВ + ХФ + Ф = А + В, а из второго В + ХВ = А + ХА + Ф + ХФ.
Добавим к обеим частям первого уравнения по ХВ, тогда получим
ХА + 2ХВ + ХФ + Ф = А + В + ХВ = А + А + ХА + Ф + ХФ = 2А + ХА + Ф + ХФ. Сокращая, получаем равенство 2ХВ = 2А, то есть А = ХВ, чего мы и хотели.
Критерии: верно получены уравнения из первого абзаца – по 1 баллу за каждое.

7.3. Аня выписала себе в тетрадь 100 каких-то чисел. Затем Соня выписала в свою тетрадь все попарные произведения чисел, написанных Аней. Артём заметил, что в сониной тетради оказалось ровно 2000 отрицательных чисел. Сколько нулей в свою тетрадь изначально выписала Аня?

Ответ: 10 нулей.
Решение: Пусть Аня выписала в тетрадь n положительных чисел, m отрицательных и $100 - n - m$ нулей. Тогда по условию $nm = 2000$, так как отрицательное число можно получить, только перемножив числа разных знаков.
Переберём все делители числа $2000 = 2^4 * 5^3$:

	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4
5^0	1	2	4	8	16
5^1	5	10	20	40	80
5^2	25	50	100	200	400
5^3	125	250	500	1000	2000

Они разбиваются на пары, произведение в которых равно 2000, запишем их по парам и выпишем их сумму:

1	2	4	5	8	10	16	20	25	40
2000	1000	500	400	250	200	125	100	80	50

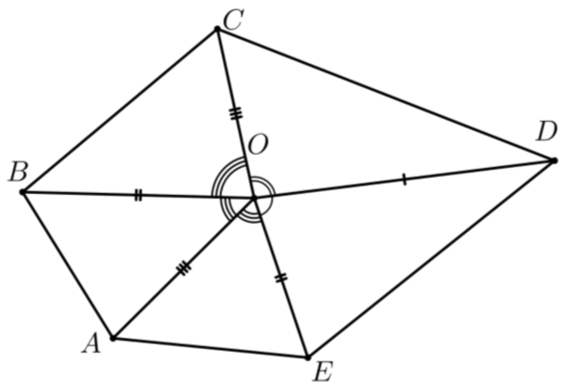
2001	1002	504	405	258	210	141	120	105	90

Только в одном из этих случаев сумма меньше 100, значит, реализован именно он. Таким образом, ненулевых чисел 90, а нулевых 10.

Критерии: Только ответ – 0 баллов.
Только ответ с проверкой – 1 балл.
Разобраны не все случаи делителей – не больше 3 баллов.
Нет объяснения, почему нет других делителей – снимать 1 балл.

7.4. Точку внутри выпуклого пятиугольника соединили с его вершинами, в результате чего пятиугольник оказался разбитым на пять равных между собой неравнобедренных треугольников. Докажите, что эти треугольники прямоугольные.

Решение: Пусть дан пятиугольник $ABCDE$ и точка O внутри него. Рассмотрим отрезки, соединяющие O с вершинами пятиугольника. По условию, никакие два подряд идущих не равны между собой (иначе бы был равнобедренный треугольник). Докажем, что есть три подряд идущих разных отрезка. Действительно, если бы это было не так, то среди любых трёх подряд идущих отрезков было бы только два разных. В сочетании с тем, что подряд два одинаковых не идут, это бы значило, что длины отрезков чередуются (например, a,b,a,b,a,b), но отрезков всего 5 – нечётное количество, то есть, это невозможно. Итого, пусть отрезки OD, OE и OA имеют разную длину. На чертеже они обозначены одной, двумя и тремя чертами соответственно. Так как все треугольники равны, отрезки OD, OE и OA – это в точности все стороны этих равных треугольников.
Так как три стороны идут подряд, можно считать, что это a, b, c. Никакая сторона не может повторяться 3 раза среди этих отрезков, так как тогда получится равнобедренный треугольник, значит, есть ровно одна сторона, которая представлена среди этих отрезков один раз (будем считать, что c), а две другие по два. Но тогда рядом с a с другой стороны может стоять только b, а далее только a. То есть порядок такой (с точностью до переобозначения): a, b, c, a, b. Рассмотрим этот случай более подробно:
Итак, $OB = OE = b$, $OA = OC = a$, $OD = c$. Обозначив тогда равные углы между соответственно равными сторонами, получим, что $3\angle COB + \angle COD + \angle DOE = 360°$. Но $\angle COB$, $\angle COD$ и $\angle DOE$ – это три разных угла (равных углов быть не может, иначе бы были равнобедренные) в равных треугольниках, значит, $\angle COB + \angle COD + \angle DOE = 180°$, откуда $2\angle COB = 180°$, т.е. $\angle COB = 90°$, что мы и хотели.



Критерии: Нет доказательства того, что есть три подряд идущих разных стороны (если это используется в решении) – минус 1 балл.
Упущены случаи в переборном решении – минус 1 балл за каждый.
Без доказательства принимается, что есть только один способ так разбить на треугольники – минус 2 балла.

7.5. В комнате Насти собралось 16 человек, каждые двое из которых либо дружат, либо враждуют. Приходя в комнату, каждый из них на двери комнаты записывал количество уже пришедших друзей, а уходя – количество оставшихся в комнате врагов. Чему может равняться сумма всех записанных чисел, после того, как сначала все пришли, а затем все разошлись?

Ответ: 120
Решение: Рассмотрим любую пару друзей. Их “дружба” была посчитана ровно один раз, так как её в свою сумму включает тот человек, что пришёл позже своего друга. Поэтому после того, как все пришли, сумма чисел на двери будет равна общему количеству дружб между людьми. Аналогично, каждая “вражда” будет посчитана ровно один раз тем человеком, что ушёл раньше. Поэтому после того, как все уйдут, к сумме чисел на двери прибавится количество всех “вражд”. Итого, общая сумма чисел на двери будет равна сумме общему количеств дружб и вражд, а это в точности количество пар пришедших людей, т.е. $16*15/2 = 120$.
Критерии: только ответ – 0 баллов.