

**Решения и критерии проверки задач Первого этапа
Всесибирской олимпиады школьников 2017-2018 г.г. по математике
7 класс**

Каждая задача оценивается в 7 баллов

7.1. Квадрат 3×3 разбит на 9 квадратов 1×1 так, как изображено на рисунке. Расставьте в этих квадратах натуральные числа от 1 до 9 (каждое ровно 1 раз), чтобы сумма чисел в любом квадрате 2×2 была одной и той же.

Решение: Например, можно расставить так, как показано на рисунке справа.

Критерии: Любая подходящая под условия расстановка без объяснения и проверки – 7 баллов.

9	1	6
2	8	5
7	3	4

7.2. Однажды утром в 9:00 из деревни Федино в деревню Нововерандово вышел пешеход Федя. Одновременно навстречу ему из Нововерандово выехала велосипедистка Вера. Известно, что до момента встречи Федя успел пройти треть пути между деревнями, однако, если бы Федя вышел на час раньше, то успел бы пройти до встречи половину пути. В какое время Федя и Вера встретились? Скорости Веры и Феде постоянны.

Ответ: 10:20

Решение 1: Поймём, что если Федя прошёл какое-то расстояние до выезда Веры, то с момента, как выедет Вера, до встречи он пройдёт треть оставшегося пути. Тогда получаем, что середина всего пути – это треть оставшегося, то есть Федя за час прошёл одну четверть всего пути. Из первого условия понятно, что скорость Веры в два раза больше, т.е. Федя и Вера вместе проходят $3/4$ пути за час, а значит, всего им понадобится $4/3$ часа, чтобы встретиться.

Решение 2: Обозначим скорость Феде за U , скорость Веры за V , расстояние между деревнями будем считать равным 1. Тогда из первого условия получаем, что $V = 2U$.

Второе интерпретируем так: сначала Федя прошёл 1 час со скоростью U , а затем с той же скоростью U , но $(1 - U) : (U + V)$ часов (расстояние делим на скорость сближения), а в сумме прошёл $1/2$ пути. То есть, $U + U(1 - U) : (U + V) = 1/2$, откуда $U = 1/4$, а дальше как в первом решении.

Критерии: только ответ, ответ с проверкой – 1 балл.

Получено, что $V = 2U$ – ещё плюс балл.

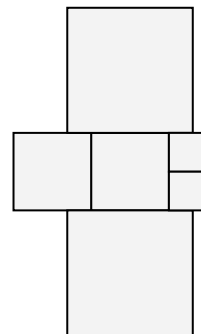
Найдено, что за один час ребята проходят вместе $3/4$ пути, дальнейших продвижений нет – 5 баллов.

7.3. Арсений собирается нарисовать на плоскости несколько (больше двух) неперекрывающихся квадратов, возможно, различного размера, и могущих иметь общие участки границы. Иван утверждает, что в любом случае сможет раскрасить все эти квадраты в 3 цвета таким образом, что никакие два квадрата одного цвета не будут иметь общего участка границы (единственная общая точка общим участком границы не считается). Арсений считает, что это не так. Кто из мальчиков прав? Ответ обоснуйте.

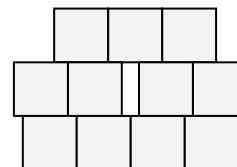
Ответ: Арсений.

Решение: Можно рассмотреть конфигурацию, изображённую на рисунке. Предположим, её можно правильно покрасить в три цвета. Тогда пусть центральный квадрат имеет цвет номер 1. Все остальные тогда имеют цвета 2 и 3, в причём в цепочке из пяти квадратов вокруг центрального эти цвета должны чередоваться. Однако, в ней нечётное число квадратов, а значит, это невозможно.

Критерии: Подходящий чертёж без обоснования – 5 баллов. Описана идея чертежа (возьмём квадрат и окружим его цепочкой из нечётного числа квадратов), но без явного примера с обоснованием, почему эта конструкция будет работать – 5 баллов, без обоснования – 3 балла.



Комментарий: Аресений будет прав даже если все квадраты должны быть одинаковыми. В этом случае можно предъявить пример из, например, 11 квадратов.



7.4. Имеется 100 монет, из которых 99 настоящие, одинаковых по весу, и 1 фальшивая, которая легче остальных. У Дмитрия в распоряжении есть чашечные весы без гирь, которые всегда показывают неверный результат взвешивания (например, если левая чаша окажется тяжелее, то они покажут либо равенство, либо перевес правой, но что именно - неизвестно). Помогите Дмитрию найти 98 настоящих монет.

Решение:

Пронумеруем монеты от 1 до 100. Взвесим первую монету и вторую. Если весы показали равенство, то одна из них фальшивая, а все остальные монеты настоящие, и мы добились желаемого. Если не равновесие, то будем считать, что перевесила монета под номером 1. Тогда вторая монета точно настоящая (иначе весы показали бы правильный результат). Отложим вторую монету в мешочек для настоящих монет.

Перенумеруем имеющиеся монеты от 1 до 99, повторим процесс.

Либо каждым взвешиванием будем получать по новой настоящей монете, и за 98 взвешиваний найдём 98 настоящих, либо в какой-то момент весы покажут равенство, и мы получим желаемое.

Критерии: Только алгоритм без обоснования – 1 баллов. Не рассмотрен случай равенства в аналогичном решении, остальное обосновано верно – 5 баллов.

7.5. Дана доска 4x2017. Двое по очереди ставят на неё ладей. Первый должен ставить ладью так, чтобы она была чётное число уже поставленных ладей, а второй - нечётное. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто может обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника? Ладья бьёт на любое расстояние по вертикали и по горизонтали, однако не перепрыгивает через фигуры. Например, если три ладьи стоят на одной горизонтали, то левая бьёт только центральную, а центральная - правую и левую.

Ответ: второй

Решение: Разобьём мысленно доску 4x2017 на две части по 2x2017. Тогда пусть второй повторяет ходы первого в другой части. Например, если первый походит в верхнюю левую клетку первой части, второй походит в другую часть, но тоже в верхнюю левую клетку. Таким образом, у второго всегда будет ход, а значит, он победит, так как игра конечна. Осталось доказать, что второй действительно может повторять ходы указанным образом.

Заметим, что второй при указанной стратегии ходит всегда в тот же столбец, что и первый. Рассмотрим два случая

1) В этом столбце до хода первого игрока не стояло ни одной ладьи. Назовём клетку, куда первый поставил ладью А, а куда второй хочет сходить - Б. Ладья в А бьёт чётное количество других ладей, но второй играл симметрично, поэтому из Б бьётся столько же ладей, плюс новая ладья в А, т.е. нечётное количество. Значит, походить можно.

2) В этом столбце уже стояло две ладьи. Заметим, что стоят они тогда через одну клетку друг от друга. Опять назовём клетки А и Б. Заметим, что горизонтали с этими клетками одинаковы, но из одной из этих клеток бьётся 2 ладьи в этом столбце, а из другой - 1. То есть, если первый поставил ладью в ту клетку, откуда билось чётное число ладей, то он, во-первых, никак не повлиял на вторую клетку, и, во-вторых, из другой клетки бьётся нечётное количество, то есть, туда теперь может сходить второй.

Критерии: только стратегия – 1 балл. Стратегия верная, в обосновании упущен один из случаев – 4 балла.