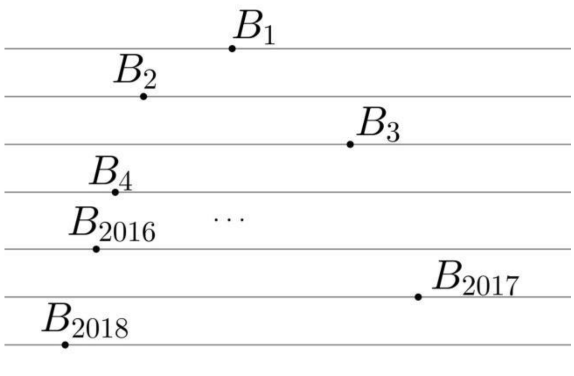
Решения и критерии проверки задач Заключительного этапа Всесибирской олимпиады школьников 2017-2018 г.г. по математике
7 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

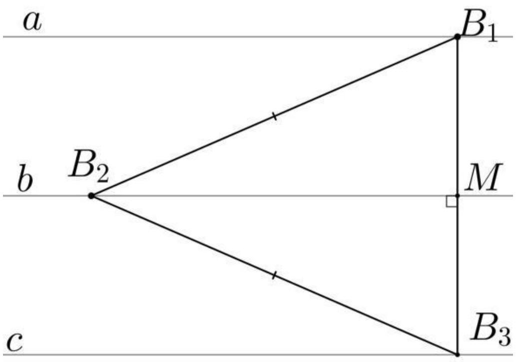
7.1. На некотором острове живёт 2018 человек, каждый из которых является либо рыцарем, который всегда говорит правду, либо лжецом, который всегда лжёт. Известно, что каждый человек дружит ровно с двумя другими. Однажды каждый из островитян заявил, что дружит ровно с одним лжецом. Обязательно ли все островитяне лжецы?
Ответ: нет, не обязательно.
Решение: например, может оказаться, что если каждый возьмёт двух своих друзей за руки, то 2015 лжецов будут стоять в одном большом хороводе, а в другом хороводе будет два рыцаря и один лжец. При этом каждый лжец из большого хоровода будет лгать, так как оба его друга будут лжецами, а не только один. Рыцари из маленького хоровода будут говорить правду, так как у них есть по одному другу-лжецу и по одному другу-рыцарю. Наконец, лжец из маленького хоровода будет лгать, так как у него не будет ни одного друга-лжеца.
Критерии: только ответ – 0 баллов, пример без доказательства, что он подходит – 5 баллов, любой пример с доказательством того, что он подходит – 7 баллов.

7.2. Квадрат со стороной 6 клеточек разрезан по сторонам сетки на 8 прямоугольников. Докажите, что какие-то два из этих прямоугольников равны по площади.
Решение: Предположим, что все прямоугольники различны по площади. Заметим, что тогда наименьшую суммарную площадь 36 имеет набор прямоугольников с площадями 1,2,3…,8. Тогда если хотя бы один прямоугольник будет иметь другую площадь, то они все не влезут в квадрат. Значит, квадрат был разрезан именно на прямоугольники такой площади. Однако, прямоугольник площади 7 может иметь размеры только 1 на 7, и не помещается в такой квадрат, а значит, вырезан из него быть не может. Противоречие.
Критерии: Замечено, что прямоугольники должны иметь площади 1,2,...,8 – 3 балла.

7.3. На плоскости через одинаковое расстояние расположены 2018 параллельных прямых. На каждой прямой расположено по одной точке. Точки B_1 и B_2 взяты произвольно на двух первых прямых. Затем точка B_3 взята так, что $B_1B_2 = B_2B_3$; B_4 так, что $B_1B_3 = B_3B_4$; …; B_i так, что $B_1B_{i-1} = B_{i-1}B_i$; …; B_{2018} так, что $B_1B_{2017} = B_{2017}B_{2018}$. При этом, если очередную точку можно выбрать двумя способами, то для нечётного номера выбирают правую точку, для чётного – более левую точку (см. рисунок). Докажите, что расположение точки B_{2018} зависит только от расположения точки B_1.
Решение: Докажем, что прямая B_1B_3 перпендикулярна данным параллельным прямым. Тем



самым докажем, что расположение точки B_3 зависит только от расположения точки B_1, а значит и дальше от B_2 ничего не зависит.
Обозначим прямую, на которой находится точка B_2 – b, а точку пересечения прямой B_1B_3 и b за M. Поймём, что отрезки B_1M и B_3M равны. Действительно, если это не так, то из точки M можно



опустить перпендикуляры MC_1 и MC_3 на прямые a и b. Тогда в треугольниках MC_1B_1 и MC_2B_2 равны стороны MC_1 и MC_3 (как расстояния между прямыми) и две пары углов (одна пара прямых углов по построению и пара вертикальных углов), прилежащих к этой стороне, тогда равны и треугольники, а значит, и соответствующие стороны B_1M и B_3M. Таким образом, B_2M – медиана в равнобедренном треугольнике $B_1B_2B_3$, а значит, она же является высотой. Таким образом, B_1B_3 перпендикулярна данным параллельным прямым, что и завершает доказательство.

Критерии: Доказано, что B_3B_1 перпендикулярен параллельным прямым, дальнейших продвижений нет – 5 баллов.

7.4. Число называется хорошим, если любые две соседние цифры в его записи отличаются хотя бы на 5. Вера написала хорошее число, а потом заменила одинаковые его цифры на одинаковые буквы, а разные – на разные. Могло ли у неё получиться слово НОВОСИБИРСК?

Ответ: нет.

Решение: Допустим, так могло получиться. Назовём маленькими цифрами – цифры 0, 1, 2, 3, 4, а оставшиеся цифры – большими. Заметим, что любые при описанной замене две маленькие цифры не могут стоять подряд, как не могут стоять подряд и две большие цифры, так как разность между любыми двумя маленькими (и любыми двумя большими) цифрами не превосходит 4. Значит, маленькие и большие цифры чередуются. Замети, что между двумя буквами С стоит 4 буквы, а значит, одна буква С заменяет маленькую цифру, а другая – большую, но при этом означают одну и ту же цифру, что невозможно.

Критерии: Только ответ – 0 баллов. Необоснованное замечание, что маленькие и большие цифры чередуются – не снимать. Идея чередования больших и маленьких цифр без дальнейших продвижений – 2 балла.

7.5. Шахматную доску со стороной в 100 клеток по линиям сетки разрезали на квадраты с нечётными сторонами (не обязательно равные), а затем в каждом полученном квадрате отметили центральную клетку. Докажите, что белых и черных клеток оказалось отмечено поровну.

Решение: Возьмём произвольный квадрат с нечётной стороной. Заметим, что в нём либо чёрных клеток на 1 больше, чем белых, либо наоборот. При том, если чёрных клеток больше, то центральная клетка чёрная, а если больше белых – то центральная клетка белая. Действительно, разобьём все строчки на пары – тогда такие пары вносят одинаковый вклад в количество чёрных и белых клеток. Остаётся одна строчка с нечётным количеством клеток. В ней снова можем разбить все клетки слева направо на пары. И останется одна угловая клетка, цвет которой и определяет, каких клеток в квадрате больше. Пусть эта клетка чёрная. Тогда в строке, в которой эта клетка содержится, другая угловая клетка – тоже чёрная. Аналогично, для столбца, содержащего эту угловую клетку. Таким образом, все угловые клетки одного цвета. Значит, и главная диагональ того же цвета. Следовательно, центральная клетка покрашена в тот цвет, который преобладает в данном квадрате, и без неё чёрных и белых клеток поровну.

Итак, вырежем во всех квадратах центральные клетки. После этого белых и чёрных клеток станет поровну. Замети, что в изначальном квадрате клеток обоих цветов было поровну. Значит, удалили клеток разных цветов равное количество.
Критерии: Не обосновано, что в квадрате с нечётной стороной, чёрных клеток на одну больше или на одну меньше – не снимать.
Не обосновано, что центральная клетка покрашена в тот цвет, который преобладает – не снимать.