Каждая задача каждого класса оценивается из 7 баллов

10 класс

10.1. Решить уравнение: $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$.

Ответ. $\frac{1}{2}\le x\le 1$.

Решение. Сначала найдём область определения уравнения, это $x\ge\frac{1}{2}$ из внутреннего радикала. Условие $x\ge\sqrt{2x-1}$ при этом тоже выполнено, так как обе части его неотрицательны и после возведения в квадрат оно равносильно неравенству $(x-1)^2\ge 0$.
Обе части исходного уравнения тоже не отрицательны, поэтому при возведении в квадрат получим равносильное уравнение $2x+2\sqrt{(x-1)^2}=2x+2|x-1|=2$, то есть $|x-1|=1-x$, что эквивалентно $x\le 1$. Пересекая с областью определения, получаем ответ $\frac{1}{2}\le x\le 1$.

Критерии проверки. При нахождении области определения уравнения не проверяется условие $x\ge\sqrt{2x-1}$: снимаем 1 балл. Нет ссылки на не отрицательность частей уравнения при возведении в квадрат: минус 1 балл.

10.2. Найти количество всех пятизначных чисел $\overline{abcde}$, все цифры которых различны и $a<b<c>d>e$.

Ответ. 1134.

Решение. Для правильной записи числа, удовлетворяющего условию задачи, нужно произвольным образом выбрать пятёрку различных цифр из 10 возможных, а потом расположить две из них слева от максимальной в порядке возрастания и две оставшихся справа от максимальной в порядке убывания. Возможны два различных случая.

1) Выбранная пятёрка не содержит нуля. Тогда её можно выбрать C_9^5 способами, затем выбрать из них две не максимальных и ненулевых цифры C_4^2 способами, и единственным способом расположить их слева от наибольшей в порядке возрастания, а обе оставшихся приписать справа от максимальной в порядке убывания. Всего имеем $C_9^5\cdot C_4^2=126\cdot 6=756$ таких чисел.

2) Выбранная пятёрка содержит ноль. Тогда её ненулевые цифры можно выбрать C_9^4 способами, затем выбрать из них две не максимальных цифры C_4^2 способами, и затем единственным способом расположить их слева от наибольшей в порядке возрастания, а одну оставшуюся и ноль приписать справа от максимальной в порядке убывания. Всего имеем $C_9^4\cdot C_3^2=126\cdot 3=378$ таких чисел.

Итого, получаем 756 + 378 = 1134 чисел.

Критерии проверки. Идея отдельного рассмотрения случаев когда среди цифр числа есть 0 и когда его нет: 1 балл. Верное рассмотрение каждого случая: 3 балла.

10.3. На продолжении диаметра AB полукруга за точку B взята произвольная точка C, через которую проведена касательная к этому полукругу, касающаяся его в точке E. Пусть биссектриса угла BCE пересекает хорды AE и BE полукруга в точках K и M соответственно. Докажите, что треугольник KEM равнобедренный.

Доказательство. Угол между касательной EC и хордой BE равен вписанному углу EAB, опирающемуся на хорду BE. Тогда в треугольниках AKC и EMC углы AKC и EMC равны, так как равны KCA и ECM (EK — биссектриса угла BCE). Значит, равны и дополнительные к ним углы EKC = EKM и EMK, являющиеся углами треугольника EKM. Следовательно, треугольник EKM равнобедренный и его боковые стороны EM и EK равны.

Критерии проверки. Замечено, что угол между касательной EC и хордой BE равен вписанному углу EAB, опирающемуся на хорду BE: 2 балла. Показано, что углы AKC и EMC равны: 3 балла. Показано, что равны и дополнительные к ним углы EKC = EKM и EMK: 2 балла.

10.4. В системе из трёх линейных уравнений $Ax+By+Cz=0, Dx+Ey+Fz=0, Gx+Hy+Iz=0$, от трёх переменных x,y,z коэффициенты *A, E, I* — положительны, а остальные отрицательны, и каждый из *.A, E, I* больше модуля суммы двух оставшихся коэффициентов того же уравнения. Докажите, что система имеет единственное решение $x=y=z=0$.

Доказательство. Предположим, система имеет ненулевое (когда значение хотя бы одной переменной отлично от нуля) решение. Умножая его при необходимости на минус единицу, получим ненулевое решение, в котором значения хотя бы двух переменных неотрицательны. Далее рассмотрим два случая.

1) Значения всех переменных неотрицательны. Выберем переменную, значение которой максимально и рассмотрим уравнение с тем же порядковым номером, что у этой переменной. Скажем, если максимально $x>0$, то $Ax+By+Cz=x\left(A+B\frac{y}{x}+C\frac{z}{x}\right)\geq x\left(A-|B|-|C|\right)=x\left(A-|B+C|\right)>0$ - противоречие. Остальные два случая рассматриваются аналогично.

2) Среди значений переменных есть отрицательное. Скажем, если $x<0$, то $Ax+By+Cz\leq Ax<0$ - противоречие. Остальные два случая рассматриваются аналогично.

Критерии проверки. Сведение к случаю, когда значения хотя бы двух переменных неотрицательны (или не положительны): 1 балл. Рассмотрение каждого из случаев 1) и 2): 3 балла.

10.5. Найти все натуральные числа ***n*** такие, что ***n*** равно сумме трёх чисел, первое из которых является максимальным делителем числа ***n-1***, отличным от ***n-1,*** второе - максимальным делителем числа ***n-2***, отличным от ***n-2,*** и третье - максимальным делителем числа ***n-3***, отличным от ***n-3.***

Ответ. 58 и 66**.**

Решение. Максимальный делитель числа, отличный от него самого, равен числу, делённому на его минимальный простой делитель. 1) Если n нечётно, то минимальные простые делители чисел $n-1$ и $n-3$ равны 2, а минимальный простой делитель $n-2$ обозначим за p - нечётное простое число. Тогда $n=\frac{n-1}{2}+\frac{n-2}{p}+\frac{n-3}{2}=n-2+\frac{n-2}{p}$, откуда $n=2p+2$ - чётное число — противоречие.

2) Если n чётно, минимальный простой делитель $n-2$ равен 2, обозначим минимальные простые делители $n-1$ и $n-3$ за p и q соответственно — различные нечётные простые числа. Если бы они совпали, то разность $n-1$ и $n-3$, равная 2, делилась бы на нечётные $p = q$, что невозможно.

Тогда $n=\frac{n-1}{p}+\frac{n-2}{2}+\frac{n-3}{q}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)n-\left(1+\frac{1}{p}+\frac{3}{q}\right)<\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)n$, откуда $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>\frac{1}{2}$.

Тогда меньшее из этих чисел меньше 4, то есть равно 3, а второе меньше 6, то есть равно 5.

Пусть сначала $p=3, q=5$, тогда $n=\frac{31}{30}n-\frac{29}{15}$, следовательно возможный ответ $n=58$

Проверка: $58=\frac{57}{3}+\frac{56}{2}+\frac{55}{5}=19+28+11$. - равенство выполнено и числа 19, 28 и 11 действительно максимальные собственные делители чисел 57, 56 и 55.

Пусть теперь $p=5, q=3$, тогда $n=\frac{31}{30}n-\frac{11}{5}$, следовательно возможный ответ $n=66$.

Проверка: $66=\frac{65}{5}+\frac{64}{2}+\frac{63}{3}=13+32+21$. - равенство выполнено и числа 13, 32 и 21 действительно максимальные собственные делители чисел 65, 64 и 63.

Критерии проверки. Замечено, что максимальный делитель числа, отличный от него самого, равен числу, делённому на его минимальный простой делитель.: 1 балл. Производится рассмотрение случаев 1) и 2): 1 балла. Показана невозможность нечётного n : 1 балл. Для чётного n обосновано различие p и q : 1 балл. Обоснованно найдено, что $p=3, q=5$ или $p=5, q=3$: 2 балла. Сделана проверка с комментарием, что «числа 19, 28 и 11 действительно максимальные собственные делители чисел 57, 56 и 55»: 1 балл.