10 класс *Каждая задача оценивается в 7 баллов*

10.1. Два спортсмена с постоянными скоростями бегают по овальной дорожке спортплощадки, первый из них пробегает дорожку полностью на 5 секунд быстрее, чем второй. Если они побегут по дорожке с одной точки старта в одном направлении, то в первый раз снова встретятся через 30 секунд. Через сколько секунд они в первый раз снова встретятся, если побегут по дорожке с одной точки старта в противоположных направлениях?

Ответ. Через 6 секунд.

Решение. Обозначим длину дорожки стадиона за S метров, а скорости первого и второго бегунов за x и y метров в секунду соответственно. Тогда из первого условия: $\frac{S}{x}+5=\frac{s}{y}$, а из второго $\frac{S}{x-y}=30$, так как при этом первый догоняет второго с начальным отставанием S метров. Из второго уравнения выражаем $S=30(x-y)$, подставляем в первое, делаем замену переменной $t=\frac{x}{y}>1$ и получаем уравнение $t^2-\frac{13}{6}t+1=0$, откуда $t=\frac{3}{2}=\frac{x}{y}$. выражаем $y=\frac{2}{3}x$, подставляем во второе уравнение, имеем $\frac{S}{x}=10$, то есть $S=10x$.

Если же бегуны побегут в противоположных направлениях, то их скорости будут складываться и они пробегут до встречи дорожку за $\frac{S}{x+y}=\frac{S}{\frac{5}{3}x}=\frac{3}{5}\frac{S}{x}=6$ секунд.

Критерии проверки. Верное составление системы уравнения: 3 балла.

10.2. Найти все пары действительных значений a и b, при которых оба уравнения $x^2+ax+b^2=0$ и $x^2+bx+a^2=0$ имеют хотя бы один общий корень.

Ответ. $a=b=0$ **.**

Решение. Чтобы уравнения имели общий корень, необходимо, чтобы каждое из них имело корни, то есть их дискриминанты должны быть неотрицательны. Следовательно, . $a^2\geq 4b^2, b^2\geq 4a^2$, откуда $a^2\geq 16a^2, b^2\geq 16b^2$, что возможно только при $a=b=0$. В этом случае оба уравнения имеют общий корень 0.

Критерии проверки. Присутствует утверждение о необходимости выполнения неравенств $a^2\geq 4b^2, b^2\geq 4a^2$: 3 балла. Упущена явная проверка того, что при $a=b=0$ уравнения действительно имеют общий корень, равный 0: снимаем 1 балл.

10.3. В ряд слева направо записаны все натуральные числа от 1 до 37 в таком порядке, что каждое число, начиная со второго по 37-ое, делит сумму всех чисел, стоящих левее него: второе делит первое, третье — сумму первого и второго, и т.д, последнее — сумму первых тридцати шести**.** На первом слева месте оказалось 37, какое число стоит на третьем месте?

Ответ. 2**.**

Решение. Если на первом месте стоит простое число 37, то на втором обязательно 1, на третьем должен быть делитель числа 37+1=38, то есть 2 или 19. Однако 19 должно стоять на последнем месте, так как 37-ое число должно делить сумму всех остальных и самого себя, то есть делить сумму всех чисел, равную $\frac{(1+37)\cdot 37}{2}=19\cdot 37$ и должно равняться 19, так как 37 уже занято. Следовательно, на третьем месте стоит число 2.

Критерии проверки. Решение не предполагает приведения примера расстановки чисел, удовлетворяющей условию. Если же приведён полный правильный пример с расстановкой, где на третьем месте стоит число 2 без доказательства его единственности: ставим 3 балла.

За построение примера расстановки, если всё остальное доказано верно, дополнительных баллов не добавляем.

10.4. В квадрат ABCD вписана окружность, касающаяся его сторон AB, BC, CD, DA в точках P,Q,R и S соответственно. На отрезках AP и AS взяты точки M и N так, что отрезок MN касается вписанной окружности. Докажите, что отрезки MC и NR параллельны.

Доказательство. Для удобства вычислений длину стороны квадрата примем равной 2, обозначим длины отрезков AN и AM за x и y соответственно. Тогда отрезки SN и PM имеют длины $1-x$ и $1-y$. По свойству касательных из одной точки отсюда следует, что длина MN равна их сумме, то есть $2-x-y$. Теорема Пифагора для треугольника AMN даёт $x^2+y^2=(2-x-y)^2$, откуда $BM\cdot DN=(2-x)(2-y)=2$. Последнее равенство запишем как $\frac{BM}{BC}=\frac{BM}{2}=\frac{1}{DN}=\frac{DR}{DN}$, откуда сразу следует подобие прямоугольных треугольников BMC и DRN, влекущее параллельность их гипотенуз MC и NR.

Критерии проверки. Получено соотношение типа $BM\cdot DN=(2-x)(2-y)=2$: 3 балла.

10.5. Какое максимальное число квадратов 2 на 2 можно уложить на клетчатую доску размера 7 на 7 квадратов так, чтобы каждые два уложенных квадрата имели не больше одной общей клетки? Квадраты 2 на 2 укладываются по линиям сетки так, что каждый закрывает ровно 4 клетки. Квадраты не выходят за границу доски.

Ответ. 18 квадратов.

Решение. Приведём сначала пример укладки 18 квадратов 2 на 2: 9 из них покрывают левый нижний квадрат размера 6 на 6 доски, а остальные 9 покрывают правый верхний квадрат размера 6 на 6 доски.

Докажем, что 19 квадратов правильно уложить нельзя. Заметим, что, если клетка доски, примыкающая к границе, покрывается двумя квадратами, то они пересекаются минимум по двум клеткам, и, если клетка доски, не примыкающая к границе, покрывается тремя квадратами, то два из них пересекаются минимум по двум клеткам. Следовательно, граничные клетки доски могут быть покрыты квадратами не более одного раза, а внутренние — не более двух. Следовательно, всего квадраты могут содержать не более $24\cdot 1+25\cdot 2=74$ клеток и всего квадратов не более 74/4=18,5 штук.

Критерии проверки. Любой правильный пример: 2 балла. Доказательство того, что квадратов не больше 18: 5 баллов.