Каждая задача каждого класса оценивается из 7 баллов

10 класс

10.1. Найти все решения уравнения: $\sqrt{1-x}+\sqrt{2-y}=\sqrt{3x+2y-7}$.

Ответ. $x=1, y=2$ **.**

Решение. Из рассмотрения области определения сразу следует, что $x\leq 1, y\leq 2$ и $y\geq \frac{7-3x}{2}$. Заметим, что, при $x\leq 1$ будет $y\geq \frac{7-3x}{2}\geq \frac{7-3}{2}=2$, с одновременным превращением неравенств в строгие при $x<1$, поэтому единственной точкой области определения будет $x=1, y=2$, что, как легко убедиться подстановкой, является решением уравнения,

Критерии проверки. Угадан верный ответ: 1 балл. Верно записана область определения: 1 балл.

10.2. Собственным делителем натурального числа называется любой его делитель, отличный от единицы и самого числа. Найти все натуральные числа, имеющие не меньше двух различных собственных делителей и делящиеся на разность любых двух из них.

Ответ. 6,8,12.

Решение. Обозначим искомое число за n и покажем, что оно должно быть чётным. В противном случае все его делители должны быть нечётными, а их разность - чётной. Но чётное число не может делить нечётное — противоречие.

Ввиду чётности n у него обязательно есть собственные делители 2 и $\frac{n}{2}$, следовательно n должно делиться на их разность, то есть число $\frac{n}{\frac{n}{2}-2}=\frac{2n}{n-4}=2+\frac{8}{n-4}$ должно быть целым.

Последнее возможно только, когда $\frac{8}{n-4}$ - целое число, то есть когда $n-4$ - чётный делитель числа 8. Отсюда получаем все возможные $n=6,8,12$. Проверяем каждое из них, они все удовлетворяют условию задачи.

Критерии проверки. Доказано, что n чётно: 1 балл. Рассмотрена делимость на $\frac{n}{2}-2$: 2 балла. Отсюда найдены возможные $n=6,8,12$: 3 балла. Для всех $n=6,8,12$ выполнена проверка: 1 балл.

10.3. Различные прямые a и b пересекаются в точке О. Рассмотрим всевозможные отрезки АВ длины *l*, концы А и В которых лежат на a и b соответственно, и обозначим за Р точку пересечения перпендикуляров к прямым a и b, восстановленным из А и В соответственно. Найти геометрическое место точек Р.

Ответ. Окружность с центром О радиусом $\frac{l}{\sin x}$., где x - угол между прямыми a и b .

Решение. Углы РАО и РВО прямые, следовательно точки А, В, О и Р лежит на окружности с диаметром ОР. Значит, Р принадлежит описанной окружности треугольника АОВ, радиус которой, по теореме синусов, равен $\frac{l}{2\sin x}$., где x - угол между прямыми a и b . Как мы уже заметили, ОР является диаметром этой окружности, следовательно ОР всегда равен $\frac{l}{\sin x}$, то есть точка Р всегда принадлежит окружности с центром О радиусом $\frac{l}{\sin x}$.
Единственным исключительным случаем этой конструкции будет случай, когда прямые перпендикулярны и отрезок целиком лежит на одной из них,при этом одна из точек А и В совпадает с О. Но и тут точка Р совпадёт со второй из А и В и расстояние до неё по прежнему будет равно $l=\frac{l}{\sin x}$.
С другой стороны, рассмотрим произвольную точку Р этой окружности, опустим из ней перпендикуляры РА и РВ на прямые a и b соответственно. Тогда РО является диаметром описанной окружности треугольника РАВ, поэтому радиус её равен половине этого диаметра, то есть $\frac{l}{2\sin x}$. Угол АРВ равен x или $180-x$, следовательно, по теореме синусов АВ равен $2\frac{l}{2\sin x}\cdot\sin(180-x)=l$ и точка Р является точкой пересечения перпендикуляров АР и ВР, восстановленных из концов отрезка АВ длины *l*, концы А и В которых лежат на a и b соответственно. Исключительный случай перпендикулярных прямых проверяется аналогично.

Критерии проверки. Показано, что точка Р лежит на указанной окружности: 4 балла. Показано, что любая точка этой окружности является точкой Р из условия задачи для некоторых А и В: 3 балла. Нет упоминания об исключительном случае: минус 1 балл.

10.4. Действительные числа a и b таковы, что $a^3+b^3=1-3ab$. Найти все значения, которые может принимать сумма $a+b$ ..

Ответ. -2 и 1.

Решение. Обозначим $a+b=x$ и $ab=y$, тогда уравнение из условия можно записать как $x^3-3xy=1-3y$, откуда $x^3-1=3xy-3y=3y(x-1)$, легко получаем первое возможное значение $a+b=x=1$. Поделив на скобку $x-1$, имеем $x^2+x+1-3y=0$. Подставим сюда $x=a+b$ и $y=ab$, получим $a^2-(b-1)a+b^2+b+1=0$. Рассмотрев последнее уравнение как квадратное относительно a, найдём его дискриминант, равный $-3(b+1)^2 \le 0$. Данное уравнение разрешимо в единственном случае $b=-1$ и его единственным корнем будет $a=-1$. В этом случае $a+b=-2$ - второй возможный ответ задачи. Проверка найденных значений не требуется, поскольку выполняемые нами преобразования были равносильными.

Критерии проверки. Нахождение $a+b=1$: 3 балла. Нахождение $a+b=-2$: 4 балла. Если угаданы оба ответа с приведением примеров a и b, на которых они достигаются: 1 балл.

10.5. Найти число всевозможных расстановок фишек по одной в некоторых клетках шахматной доски 8 на 8 таких, что количество фишек, стоящих в каждой строке различно и количество фишек, стоящих в каждом столбце различно.

Ответ. $2\cdot(8!)^2$.

Решение. Строка или столбец могут содержать от 0 до 8 фишек, поэтому, если их количества по строкам и по столбцам различны, то множество значений количеств фишек в строках и множество значений количеств фишек в столбцах оба представляют из себя ряд чисел 0, 1, 2, …, 7, 8 с одним пропуском, причём пропуск этот в обоих случаях один и тот же и равен равен разности 36 и числа фишек на доске. Если этот пропуск не равен 0 или 8, то на доске одновременно будет либо пустая срока и полный столбец, либо наоборот, что невозможно. Следовательно есть две возможности: на доске стоят 36 фишек, и количества их в строках и столбцах равны 1,2,3,...,8., либо на доске стоят 28 фишек, и количества их в строках и столбцах равны 0,1,2,3,...,7. Одновременно меняя занятые клетки на пустые и наоборот мы видим, что количества разных расстановок первого и второго типов равны.

Пусть нам дана произвольная расстановка первого типа, в ней найдутся заполненная строка и заполненный столбец — всего . $8\cdot 8=64$ варианта для выбора их номеров. Вычеркнем их и получим расстановку 21 фишки на доске 7 на 7 с разным числом фишек в строках и разным числом фишек в столбцах. На доске 7 на 7 это соответствует расстановке с пустой строкой и пустым столбцом, для которых есть $7\cdot 7=49$ способов выбора. Снова вычёркиваем их, получаем расстановку 21 фишки на доске 6 на 6 и т. д. Продолжая так, мы получим $(8!)^2$ вариантов выбора номеров соответствующих строк и столбцов (попеременно полных и пустых), которые полностью и однозначно определяют данную расстановку 36 фишек на доске 8 на 8. Добавляем к ним столько же вариантов расстановок 28 фишек на 8 на 8, получаем ответ: $2\cdot(8!)^2$.

Критерии проверки. Доказано, что на доске могут стоять только 28 или 36 фишек: 2 балла. Верно подсчитано количество расстановок только 28(36) фишек: 6 баллов. Любой доказываемый неверный ответ: 0 баллов.