Решения и критерии проверки задач Второго этапа Всесибирской олимпиады школьников 2016-2017 г.г. по математике 8 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

8.1. По кругу в каком-то порядке расставлены числа от 1 до 2017. Может ли оказаться, что сумма любых трёх чисел, стоящих подряд, делится на 2?

Ответ:

Решение: Предположим, сумма любых трёх подряд идущих чисел чётна. Рассмотрим четвёрку *abcd*. Так как $a + b + c$ и $b + c + d$ чётны, a и d имеют одну чётность. Значит, любые числа, стоящие через 2,5,8,11… мест, имеют одну чётность. Но тогда зафиксируем любую тройку подряд идущих чисел. Возможно два варианта:

1) Они все чётны, но тогда все числа в кругу чётны, что неверно

2) Среди них 2 нечётных и 1 чётное, но тогда чётных чисел в кругу не больше трети, что тоже неверно.

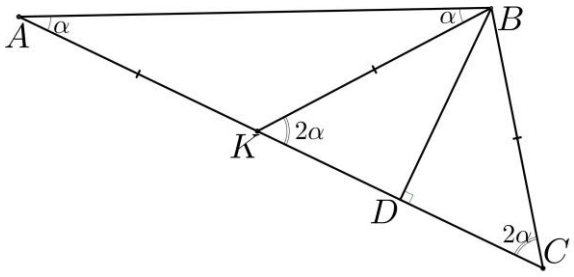
Значит, расставить нельзя.

Критерии: Только ответ — 0 баллов.

Доказано, что числа через два имеют одну чётность — 2 балла.

Строго не обоснована фраза “но тогда чётных чисел в кругу не больше трети” — не снимать баллы.

8.2. В треугольнике *ABC* угол *A* в два раза меньше угла *C*, а точка *D* на стороне *AC* является основанием высоты, проведённой из *B*. Докажите, что разность отрезков, на которые *D* делит *AC*, равна одной из сторон треугольника *ABC*.



Решение: Отразим точку *C* относительно *D*, получим точку *K*. В треугольнике *BKC* отрезок *BD* является медианой и высотой, поэтому *BK* = *BC* и угол *BKC* равен углу *BCK*. Но угол *BKC* является внешним к треугольнику *ABK*, поэтому угол *ABK* равен углу *BAK*, следовательно *AK* = *BK*.

Значит, *AD* - *DC* = *AD* - *DK* = *AK* = *BK* = *BC*, чего мы и хотели.

Осталось заметить, что точка *K* лежит именно между *A* и *C*, так как иначе угол *BAC* (α) был бы внешним к треугольнику *BKA*, то есть был бы больше угла *BKA* (2α), что невозможно.

Критерии: Если в таком решении никак не обосновано, что точка *K* лежит между *A* и *C* — снимать 1 балл.

8.3. Между городами Дзержинск и Львов проложено теплоходное сообщение. Каждую полночь из Дзержинска выходит теплоход, который ровно через восемь суток прибывает во Львов. Сколько теплоходов встретит пароход “Раритет” на своём пути в Дзержинск, если он выйдет из Львова ровно в полночь и потратит на путь всё те же восемь суток?

Ответ: 17.

Решение: В то время, как “Раритет” отходит из Львова, туда прибывает теплоход, который вышел из Дзержинска 8 суток назад. В момент прибытия “Раритета” в конечный пункт с начального момента прошло 8 суток, и в этот момент из Дзержинска выходит теплоход – последний, который пароход “Раритет” встречает на своем пути. Таким образом “Раритет” встретит все теплоходы, которые выходили из Дзержинска, начиная с 8 суток до начального времени и заканчивая 8 сутками после начального времени – всего 17 пароходов (если считать, что корабли встречаются, когда в один и тот же момент один из них отходит, а другой – прибывает).

Критерии: только ответ, ответ с проверкой — 0 баллов.

Если считается, что “Раритет” не встречает первый и/или последний теплоходы — баллы не снимать.

8.4. На квадратной доске со стороной N, где N — некоторое натуральное число, в левом нижнем углу стоит шахматный слон. Алексей и Данил по очереди ходят этим слоном, первый ходит Алексей, причём игрокам запрещается ходить в клетки, в которых слон уже был (слон ходит по диагонали на любое расстояние). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из мальчиков может гарантировать себе выигрыш вне зависимости от действий соперника?
Ответ: N нечётное – выигрывает Данил, N чётное – Алексей.
Решение: Если N нечётное, опишем стратегию игры Данила и докажем, что побеждает именно он.
1) Если Алексей своим ходом оказывается на главной диагонали, ходим в любую клетку на этой же диагонали. Это всегда можно сделать, так как изначально непосещённых клеток на ней чётное число, а после хода Алексея всегда нечётное.
2) Если Алексей ходит в клетку вне главной диагонали, то мы идём в клетку, зеркально симметричную ей относительно главной диагонали. Очевидно, что до этого посетить эту клетку мы не могли.
Так как у Данила всегда есть, куда сходить, а клеток конечное число, Алексей обязательно проиграет.
Если N чётное, то выигрывает Алексей, первым ходом сходив куда угодно на главной диагонали, а затем придерживаясь точно такой же стратегии, как и Данил в нечётном случае. Очевидно, что доказательство корректности алгоритма сохранится.
Критерии: только ответ — 0 баллов.
Полностью доказан только один случай — не более 5 баллов.
Только стратегия без объяснения, почему она работает — не более 3 баллов.
Если в подобном решении не отмечено, почему игрок побеждает из-за конечности игры — снимать 1 балл.

8.5. Егор, Никита и Иннокентий по очереди играли в шахматы друг с другом (двое играют, один смотрит). Причём, после каждой партии проигравший уступал место за доской зрителю (ничьих не было). В итоге оказалось, что Егор участвовал в 13 партиях, а Никита – в 27. Сколько партий сыграл Иннокентий?
Ответ: 14.
Решение: С одной стороны, партий было не менее 27. С другой стороны, игрок не может пропустить две партии подряд, то есть каждый играет не реже, чем каждую вторую партию. Поэтому, если партий было хотя бы 28, Егор бы поучаствовал хотя бы в 14, что противоречит условию. Значит, партий было сыграно ровно 27, и в каждой участвовал Никита. В 13 из них его соперником был Егор, значит, в 14 оставшихся это был Иннокентий, и это и есть ответ.
Критерии: Только ответ, ответ с проверкой – 0 баллов.