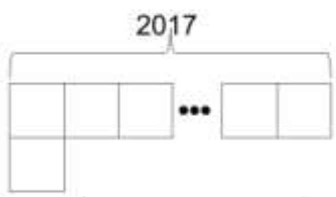
Решения и критерии проверки задач Заключительного этапа Всесибирской олимпиады школьников 2016-2017 г.г. по математике
8 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

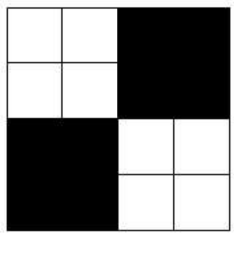
8.1. В вагон загрузили несколько килограммов яблочного джема, среди которого было 20% хорошего и 80% плохого. Каждый день половина имеющегося плохого джема сгнивала, и его выбрасывали. Через несколько дней оказалось, что в вагоне стало 20% плохого и 80% хорошего джема. Сколько дней прошло после загрузки?
Ответ: 4 дня.
Решение 1: Пусть изначально всего было x, а в конце стало y килограммов джема. Тогда, так как количество хорошего джема не менялось, $0.2x = 0.8y$, то есть $x = 4y$. Отсюда, изначально плохого джема было $0.8x = 3.2y$, а стало $0.2y$, то есть масса плохого джема уменьшилась в 16 раз. Из того, что каждый день количество плохого джема уменьшалось вдвое, ясно, что прошло 4 дня.
Решение 2: Сначала было 100 условных единиц джема: 20 хорошего и 80 плохого. В конце плохого джема стало 20%, а хорошего – 80% от нового количества, то есть хорошего стало в 4 раза больше. То есть новое количество плохого джема составляет 5 условных единиц. При этом оно каждый раз уменьшалось в 2 раза, а в итоге уменьшилось в 16 раз, значит, прошло 4 дня.
Критерии: Только ответ, ответ с проверкой – 1 балл. В решении, аналогичном второму, вводятся не абстрактные единицы измерения, а конкретные и при этом никак не поясняется, что единицы измерения не важны – 1 балл.

8.2. Однажды Алексей и Данил играли в такую игру. Если на доске записано некоторое число x, то его можно стереть, а вместо него записать $2x$ или x-1000. Проигрывает тот, кто получил число не больше 1000 или не меньше 4000. Оба игрока стремятся победить. В какой-то момент ребята перестали играть. Кто проиграл, если первым числом было 2017?
Ответ: никто не проиграл.
Решение: заметим, что если число меньше 2000, но больше 1000, то умножением на 2 можно получить число, которое меньше 4000. Если число меньше 4000, но больше 2000, то вычитанием 1000 (возможно, два раза) можно получить число между 1000 и 2000. Таким образом, единственное число, из которого нельзя сделать ход – 2000.
Докажем, что 2000 никто получить не мог. Заметим, что исходное число не делится на 5. Если мы умножаем его на 2 или вычитаем из него 1000, то новое число снова не делится на 5.
Таким образом, Алексей и Данила могли бы продолжать свою игру вечно и никто не проиграл.
Критерии:
Замечено только, что из чисел меньше 2000 и больше 2000 всегда можно сделать ход – 3 балла.
Доказано только, что 2000 получить не получится – 3 балла.

8.3. Клетки доски 4028 на 4028 покрашены в чёрный и белый цвет таким образом, что в любом уголке из 2018 клеток (даже повёрнутом и/или перевёрнутом) белых и чёрных клеток поровну. Верно ли, что все клетки обязательно покрашены в шахматном порядке?



Ответ: Нет, не обязательно
Решение: Раскрасим всю доску в шахматном порядке, а центральный квадрат 4 на 4 так, как изображено на картинке. Проверим, что в любом уголке указанного размера чёрных и белых клеток поровну. Если он не задевает центральный квадрат 4 на 4, это очевидно.

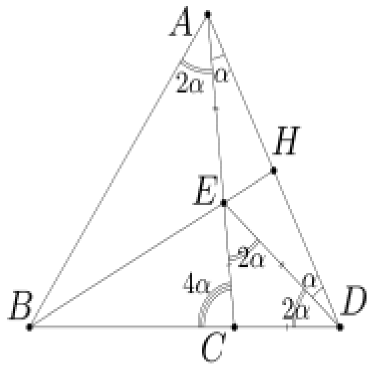


Прислоним теперь уголок короткой стороной к верхней стороне квадрата, а длинную направим вниз. Заметив, что 2017 = (4028/2) + 3, понимаем, что он выступит ниже квадрата 4х4 на одну клетку. В частности, из этого следует, что уголок может пересекать квадратик только ровно по 4 клеткам (иначе он просто не влезет целиком в большой квадрат). Очевидно, что в этом случае в их пересечении 2 белых и 2 чёрных клетки. Мысленно выбросим их из уголка, несложно заметить, что оставшиеся покрашены внутри уголка в шахматном порядке, а значит, их равное количество.

Критерии:

Только пример без обоснования – 5 баллов.

8.4. В треугольнике ABC провели биссектрису BE. Оказалось, что $BC + CE = AB$. Докажите, что в треугольнике ABC есть два угла, один из которых в два раза больше другого.



Решение: Продлим сторону BC за точку C до точки D такой, что $EC = CD$. Продлим BE до пересечения с AD в точке H. Так как $BC + CD = BC + CE = AB$, треугольник ABD равнобедренный, значит, биссектриса BH является медианой и высотой. Заметим, что тогда она является медианой и высотой в треугольнике AED, то есть он тоже равнобедренный. Обозначим за α угол EAD, ему же равен угол ADE как соответственный угол при основании равнобедренного треугольника. Тогда $\angle CED = 2\alpha$ как внешний угол к треугольнику AED. Следовательно, $\angle EDC = 2\alpha$, как угол при основании в треугольнике EDC (напомним, что треугольник EDC равнобедренный по построению). Тогда $\angle ADB = \angle ADE + \angle EDC = 3\alpha$. Отсюда $\angle BAE = \angle BAD - \angle EAH = 3\alpha - \alpha = 2\alpha$. Осталось заметить, что $\angle ECB = 4\alpha$ как внешний к треугольнику ECD, а значит, мы нашли два искомых угла.

8.5. В списке $1,2,...,2016$ отметили два числа $a < b$, разделив ими ряд на 3 части (возможно, некоторые из частей не содержали чисел вообще). После этого список перемешали следующим образом: a и b остались на местах, а ни одно из других 2014 чисел не осталось в той же части, где было изначально. Сколькими способами можно было выбрать a и b?

Ответ: 1 + 2 + … + 1008 = 1009*504 = 508536 способов.

Решение:

Гипотеза. Докажем, что вопрос эквивалентен подсчёту числа способов разбить *2014* на три упорядоченных неотрицательных слагаемых $2014 = x + y + z$, для которых выполнено нестрогое неравенство треугольника, т.е. $x + y \geq z$, $x + z \geq y$, $y + z \geq x$.

Необходимость. Если мы выбрали a и b, то у нас образовались три числовых отрезка, в которых в сумме *2014* чисел. Понятно, что если в каком-то из них чисел больше, чем в двух других вместе взятых, то перемешать числа указанным способом мы не сумеем.

Достаточность. Выберем $a = x + 1$, $b = x + y + 2$, то есть разобьём ряд на части в x,y и z чисел. Докажем, что перемешать числа указанным способом мы сумеем. Будем считать $x \geq y \geq z$. Известно, что $y + z \geq x$, остальные неравенства выполняются автоматически. Будем теперь менять числа из y и z местами попарно, пока нетронутых чисел не останется в сумме ровно x. После этого меняем все числа из x на все нетронутые числа из y и z и получаем искомую перестановку.

Почему это можно сделать? Во-первых, сначала чисел в y и z хотя бы x по неравенству треугольника, и каждым действием мы количество нетронутых уменьшаем на *2*. Но $x + y + z =$

2014, поэтому x и $(y+z)$ имеют одну чётность, откуда и следует, что рано или поздно мы получим требуемое.

Подсчёт способов: совершим перебор по x. Он меняется от 0 до 1007, тогда $y + z \geq x$ выполнено.

$x = 0$, $y \geq z$, $z \geq y$, следовательно, $z = y = 1007$ – один способ

$x = 1$, $1 + y \geq z$, $z + 1 \geq y$, $y = 2013 - z$, следовательно, $1007 \geq z$; $z \geq 1006$ – два способа

…

$x = k$. $k + y \geq z$, $z + k \geq y$, $y = 2014 - k - z$. следовательно, $k + 2014 - k - z \geq z$, $z + k \geq 2014 - k - z$, то есть $1007 \geq z$; $z \geq 1007 - k$ – $(k+1)$ способ.

...

Всего 1 + 2 + … + 1008 = 1009*504 = 508536 способов.

Критерии:

Только ответ – 0 баллов

Только гипотеза – 1 балл.

Только необходимость – 1 балл.

Только достаточность – 2 балла.

Только подсчёт – 3 балла.

Эти баллы суммируются.