11 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

11.1. Найти все целые положительные решения уравнения $(n+2)!-(n+1)!-(n)!=n^2+n^4$.

Ответ. n =3.

Решение. Перепишем уравнение в виде $n!=(n*(n^2+1))/(n+2)$. Преобразовывая правую часть, получим $n!=n^2-2n+5-10:(n+2)$. Последняя дробь будет целым числом при n=3 и n=8, но последнее число не является решением (подставьте!)

Критерии проверки. Приобретение лишних решений: минус 3 балла. Угадан и проверен ответ: 1 балл.

11.2. Какое из чисел больше, $2^{\sqrt{\log_3}}$ или $3^{\sqrt{\log_2}}$?

Ответ. $3^{\sqrt{\log_2 3}}$ больше, чем $2^{\sqrt{\log_3}}$.

Решение. Двойка меньше тройки, поэтому $\log_3 2<1$ и $\sqrt{\log_3 2}<1$, следовательно, $2^{\sqrt{\log_3 2}}<2^1=2$. С другой стороны, $\log_2 3>1$ и $\sqrt{\log_2 3}>1$, следовательно, $3^{\sqrt{\log_2 3}}>3^1=3>2>2^{\sqrt{\log_3 2}}$, что и требовалось доказать.

Критерии оценивания. Приближённые вычисления на калькуляторе: 0 баллов.

11.3. Квадрат со стороной 4 см разделён тремя параллельными горизонтальными и тремя параллельными вертикальными линиями на 16 квадратиков со стороной 1 см. Стороны этих квадратиков, включая и те, которые расположены на границе большого квадрата, будем называть *единичными отрезками*. Сколькими способами можно задать на каждом из 40 единичных отрезков ориентацию так, чтобы общая сумма всех полученных 40 векторов была равна 0? Ответ можно дать в виде формулы, не обязательно доводить его до числа.

Ответ. $C_{20}^{10}\cdot C_{20}^{10}$.

Решение. Всего будет по 20 горизонтальных и вертикальных отрезков. Если считать их расположенными вдоль координатных осей OX и OY соответственно, и обозначить количество положительно ориентированных горизонтальных и вертикальных отрезков за x и y соответственно, то координаты суммы всех полученных векторов будут равны $(2x-20,2y-20)$. Следовательно, чтобы сумма всех векторов равнялась нулю, необходимо и достаточно, чтобы ровно половина горизонтальных и ровно половина вертикальных отрезков были ориентированы положительно, а остальные — отрицательно. При этом безразлично, какие именно. C_{20}^{10} способов выбора 10 из 20 горизонтальных положительно ориентированных отрезков и C_{20} способов выбора 10 из 20 вертикальных положительно ориентированных отрезков независимы друг от друга, поэтому ответом будет число $C_{20}^{10}\cdot C_{20}$.

Критерии оценивания. Доказательство того, что ровно половина горизонтальных и ровно половина вертикальных отрезков ориентированы положительно, а остальные — отрицательно: 3 балла.

11.4. Пусть O — точка пересечения диагоналей выпуклого четырёхугольника *ABCD,* а *P, Q, R, S* - точки пересечения медиан треугольников *AOB, BOC, COD* и *DOA* соответственно. Найти отношение площадей четырёхугольников *PQRS* и *ABCD.*

Ответ. $\frac{2}{9}$

Решение. Обозначим середины сторон *AB, BC, CD* и *DA* четырёхугольника *ABCD* через *X,Y,Z,T* соответственно. По свойству медиан, точки *P, Q, R, S* делят отрезки *OX,OY,OZ,OT* в отношении 2:1, считая от O. Следовательно, площадь четырёхугольника *PQRS* равна

$(\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$ площади четырёхугольника *XYZT.* Покажем, что площадь последнего четырёхугольника равна половине площади *ABCD*. Заметим, что отрезок *XY* является средней линией треугольника *ABC,* поэтому площадь треугольника *XBY* равна четверти площади треугольника *ABC.* Аналогично, площадь треугольника *ZDT* равна четверти площади треугольника *CDA,* а сумма площадей *XBY* и *ZDT* равна четверти площади *ABCD.* Так же доказывается, что и сумма площадей *YCZ* и *TAX* равна четверти площади *ABCD.* Наконец, площадь *XYZT* равна разности площадей *ABCD* и треугольников *XBY, ZDT, YCZ* и *TAX,* то есть половине площади *ABCD.*

Окончательно**,** площадь четырёхугольника *PQRS* равна $\frac{1}{2}(\frac{2}{3})^2 = \frac{2}{9}$ площади четырёхугольника *ABCD.*

Критерии проверки. Доказано что площадь четырёхугольника *PQRS* равна $(\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$ площади четырёхугольника *XYZT:* 4 балла. Доказано что площадь четырёхугольника *XYZT* равна половине площади *ABCD:* 3 балла.

11.5. Алфавит состоит из n букв. Слово, составленное из этих букв, называется *разрешённым*, если все стоящие в нём рядом буквы различны и из него нельзя вычёркиванием букв получить слово вида $abab$, где буквы a и b различны. Какую максимальную длину может иметь разрешённое слово?

Ответ. $2n-1$.

Решение. Докажем методом математической индукции. При $n=1,2$ - очевидно. В произвольном слове w от $n+1$ буквы рассмотрим первую слева букву, назовём её a, если она больше не встречается в w, оставшаяся часть w является словом от n букв и по предположению индукции имеет длину не больше $2n-1$. Общая длина w при этом не превосходит $2n-1+1=2n<2n+1$.

Если a встречается в w ещё хотя бы раз, то подслова, на которые a разбивает w, не имеют общих букв. Иначе, убрав всё, кроме первой a, буквы b, встречающейся в разных подсловах и второй буква a, стоящей между этими b, получим слово $abab$, запрещённое условием. Пусть всего w содержит k вхождений a, оно разбивает w на k (если последняя буква w не a) или $k-1$ (если последняя буква w равна a) подслов, каждое из которых использует непересекающееся с другими множество букв. Длина каждого подслова оценивается по индукции как удвоенное число использованных в нём различных букв, уменьшенное на 1. Всего в этих словах задействовано n букв, поэтому общая суммарная длина всех подслов не превосходит $2n-(k-1)=2n-k+1$. Добавляем сюда k вхождений a, получим, что длина w не превосходит $(2n-k+1)+k=2n+1=2(n+1)-1$ - шаг индукции доказан.

Критерии проверки. Любой неверный ответ и попытка его доказательства: 0 баллов. Попытка доказательства, опирающаяся на то, что самое длинное слово обязательно имеет вид $a_1a_2...a_n...a_2a_1$: 0 баллов.