11 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

11.1. Найти все натуральные числа n такие, что существуют n последовательных натуральных чисел, сумма которых равна n^2.

Ответ. Все нечётные n.

Решение. Пусть n удовлетворяет условию и первое из n последовательных натуральных чисел равно $x+1$, тогда последнее равно $x+n$, а их сумма равна $n\left(x+\frac{n+1}{2}\right)$, откуда $n=2x+1$ - нечётно. С другой стороны, для любого нечётного n сумма n последовательных

натуральных чисел $\frac{n+1}{2},\frac{n+3}{2},...,\frac{3\text{n}-1}{2}$ равна, очевидно, n^2, поэтому любое нечётное удовлетворяет условию.

Критерии проверки. Доказано, что все подходящие n нечётны: 4 балла. Доказано, что все нечётные n подходят: 3 балла.

11.2. Найти все решения уравнения: $\cos^2 x+\cos^2 2\text{x}+\cos^2 3\text{x}=1$.

Ответ. $x=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi,\pm\frac{\pi}{4}+\frac{l\pi}{2},\pm\frac{\pi}{6}$

Решение. Можно, действуя прямо в лоб, заменить ,

после преобразований получим: $8\cos^6 x-10\cos^4 x+3\cos^2 x=0$, откуда $\cos x=0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{\sqrt{3}}{}$.

Следовательно, $x=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi,\pm\frac{\pi}{4}+\frac{l}{2},\pm\frac{\pi}{6}+m\pi$

Можно решать по-другому, заменить квадраты косинусов через косинусы двойного угла, получив $\cos 2x+\cos 4\text{x}+\cos 6\text{x}=-1$, затем свернуть сумму первого и третьего слагаемых в удвоенное произведение косинусов, выразить всё через $\cos 2\text{x}$, получив уравнение $2\cos^3 2\text{x}+\cos^2 2\text{x}-\cos 2\text{x}=0$ с решениями $\cos 2x=0,-1,\frac{1}{2}$.

Критерии проверки. Нахождение значений $\cos x=0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ или $\cos 2\text{x}=0,-1,\frac{1}{2}$: 4 балла. Верное выписывание всех серий решений: 3 балла. Потеря части решений: снимаем 2-3 балла.

11.3. При каком наименьшем n выполнено условие: если в некоторых клетках таблицы размера 6×6 в произвольном порядке расставить n крестиков (не более одного в клетке), то обязательно найдутся три клетки, образующие полоску длины 3, вертикальную или горизонтальную, в каждой из которых поставлен крестик?

Ответ. $n=25$.

Решение. Если крестиков не меньше 25, то одна из строк таблицы содержит не меньше 5 крестиков, и не больше одной пустой клетки. Тогда либо три левых клетки этой строки, либо три правых её клетки все содержат крестики и являются искомой полоской.

Если крестиков меньше 25, то их можно расставить так, чтобы не было трёх крестиков, образующих полоску. Для этого пустыми нужно оставить все клетки одной главной диагонали, и клетки двух диагоналей длины 3, ей параллельных.

Критерии проверки. Оценка (если больше 24, то полоска всегда найдётся): 3 балла. Пример расстановки 24 и меньше крестиков без трёх крестиков подряд: 4 балла.

11.4. Найдите все натуральные числа x такие, что произведение всех цифр в десятичной записи x равно $x^2-10\text{x}-22$

Ответ. $x=12$.

Решение. Во-первых, произведение всех цифр натурального числа неотрицательно, поэтому $x^2-10x-22$, откуда $x\ge\dfrac{10+\sqrt{188}}{2}$, то есть $x\ge12$. Во-вторых, если в произведении всех цифр натурального числа заменить все цифры, кроме первой, на десятки, то произведение не уменьшится, но будет не больше самого числа, поэтому произведение всех цифр числа не превосходит самого числа, значит $x^2-11x-22\le0$, откуда $x\le\dfrac{11+\sqrt{209}}{2}$, то есть $x\le12$. Для

$x=12$ условие, очевидно, выполнено, следовательно, это единственный ответ.

Критерии проверки. Только ответ с проверкой: 1 балл. Доказательство того, что произведение всех цифр числа не превосходит самого числа: 3 балла.

11.5. На плоскости дан отрезок AB и на нём произвольная точка M. На отрезках AM и MB как на сторонах построены квадраты AMCD и MBEF , лежащие по одну сторону от AB, и N – точка пересечения прямых AF и BC. Докажите, что при любом положении точки M на отрезке AB каждая прямая MN проходит через некоторую точку S, общую для всех таких прямых.

Доказательство. Треугольники AMF и CMB равны по двум прямым углам и двум парам катетов. Более того, второй получается из первого поворотом на 90 градусов относительно точки M по часовой стрелке, следовательно, их гипотенузы AF и BC перпендикулярны. Значит, точка N лежит на окружности с диаметром AB. Кроме того, угол FNB, равный углу ANB, тоже прямой, следовательно, точка N лежит на описанной окружности квадрата MBEF. Отсюда получаем в случае, когда точка M ближе к B, угол FNM равен углу FEM как вписанный, опирающийся на одну хорду FM, и имеет величину 45 градусов. В случае, когда точка M ближе к A, угол BNM равен углу BEM как вписанный, опирающийся на одну хорду FM, и имеет величину 45 градусов.

В обоих случаях прямая MN всегда является биссектрисой прямого угла ANB и проходит через середину дуги окружности с диаметром AB, не содержащей точку N и не зависящей от выбора M.

Критерии проверки. Замечено равенство треугольников AMF и CMB: 1 балл. Доказана перпендикулярность AF и BC: 1 балл. Замечено, что N лежит на окружности с диаметром AB: 1 балл. Замечено, что N лежит на описанной окружности квадрата MBEF и угол FNM имеет величину 45 градусов (в случае, когда точка M ближе к B), или угол BNM имеет величину 45 градусов (в случае, когда точка M ближе к A): 2 балла. Доказано, что MN всегда проходит через середину дуги окружности диаметром AB, не содержащей точку N и не зависящей от выбора M: 2 балла.