Каждая задача оценивается в 7 баллов

11.1. Могут ли при каком-то значении x оба числа $\cos x+\sqrt{2}$ и $\cos 2x+\sqrt{2}$ быть рациональными?

Ответ. Нет.

Решение. Обозначим эти числа за a и b соответственно. Тогда $b-\sqrt{2}=2\left(a-\sqrt{2}\right)^2-1=2a^2+3-4a\sqrt{2}$, откуда $b-2a^2-3=(1-4a)\sqrt{2}$. В силу рациональности a и b последнее равенство возможно только при $1-4a=0$, откуда $a=\frac{1}{4}$, однако при этом $\cos x=\frac{1}{4}-\sqrt{2}<-1$, что невозможно.

Критерии проверки.

11.2. Решить в действительных числах систему уравнений :

$x^2+xy+y^2=4, x^4+x^2y^2+y^4=8$

Ответ. $\pm\left(\sqrt{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}},\sqrt{\frac{3\mp\sqrt{5}}{2}}\right)$ - всего 4 решения.

Решение. Рассмотрим случаи.

1) $x=y$, тогда $3x^2=4, 3x^4=8$, откуда $x^2=2$, что явно не удовлетворяет обоим уравнениям. Решений нет.

2) $x=-y$, тогда $x^2=4, 3x^4=8$, откуда $x^2=\frac{2}{3}$ что тоже явно не удовлетворяет обоим уравнениям. Решений нет.

3) $x\neq\pm y$. Домножим первое уравнение на $x-y$. получим $x^3-y^3=4(x-y)$. Домножим второе уравнение на x^2-y^2, получим: $x^6-y^6=8\left(x^2-y^2\right)$. Поделим второе уравнение на первое, получим $x^3+y^3=2(x+y)$, откуда $x^2-xy+y^2=2$. С учётом первого уравнения, $xy=1, x^2+y^2=3$. Заменяя $y=\frac{1}{x}$, получаем биквадратное уравнение $x^4-3x^2+1=0$, откуда $x=\pm\sqrt{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}, y=\pm\sqrt{\frac{3\mp\sqrt{5}}{2}}$ - всего 4 решения.

Критерии оценивания. Потеря части решений или приобретение лишних решений: минус 2-3 балла, в зависимости от числа потерянных/приобретённых.

11.3. Внутри остроугольного треугольника ABC выбрали точку P, отличную от O— центра описанной окружности треугольника ABC, и такую, что угол PAC равен углу PBA и угол PAB равен углу PCA. Доказать, что угол APO — прямой.

Доказательство. Обозначим величины углов PAC и PBA за a, а величины углов PAB и PCA — за b. Тогда величина угла BAC равна $a+b$, а величина угла BPC равна $360-2(180-a-b)=2(a+b)$, то есть удвоенной величине BAC. Ровно такую же величину имеет и угол BOC — центральный в описанной окружности треугольника ABC, соответствующий вписанному углу BAC. Следовательно, четыре точки B,O,P,C лежат на одной окружности S. Точка O попадает тогда в один из треугольников PAB или PAC, можно считать, в треугольник APB, так как не может лежать в треугольнике BPC или на его сторонах, тогда угол BOC был бы больше угла BPC. Величина угла APO в этом случае равна разности углов APB и OPB, который равен углу OCB, как вписанный в S, опирающийся на ту же хорду OB.

Величина APB очевидно равна $180-a-b$, величина OCB, как угла при основании равнобедренного треугольника OCB с углом $2(a+b)$ при вершине O, равна $90-a-b$

Считаем их разность: $180-a-b-(90-a-b)=90$ - угол APO действительно прямой.

Критерии оценивания. Доказано, что четыре точки B,O,P,C лежат на одной окружности: 2 балла. Обоснование того, что точка O попадает тогда в один из треугольников PAB или PAC, как условие правильности счёта угла APO: 2 балла. Замечание, что угол OPB равен углу OCB как вписанный: 2 балла. Подсчёт величины угла OCB: 1 балл.

11.4. Доказать, что рёбра произвольного тетраэдра (треугольной пирамиды) можно разбить некоторым образом на три пары так, что существует треугольник, длины сторон которого равны суммам длин рёбер тетраэдра в этих парах.

Доказательство. Обозначим вершины тетраэдра через ABCD, разобьём его рёбра на пары противоположных: {AB,CD},{AC,BD},{AD,BC}. Из неравенства треугольника следует: AB+AC>BC,DB+DC>BC,AC+CD>AD,AB+BD>AD. Сложив все неравенства и поделив пополам, получим: AC+CD+BD+AB=(AC+BD)+(AB+CD)>AD+BC, то есть, что сумма длин любой пары противоположных рёбер меньше суммы двух других аналогичных сумм. Из неравенства треугольника следует существование искомого в условии треугольника.

Критерии проверки.

11.5. Найти все натуральные n, для которых все натуральные числа от 1 до n включительно можно записать в ряд в таком порядке, что сумма первых слева k чисел будет либо делить сумму всех $n-k$ оставшихся, либо делиться на неё при любом k от 1 до $n-1$.

Ответ. $n=3,4,5$.

Решение. Примеры для этих чисел: {1,2,3},{1,4,3,2},{1,4,5,2,3}.

Пусть $a_1,a_2,...,a_n$ - все числа от 1 до n, записанные в требуемом в условии порядке. Обозначим их сумму за S, и рассмотрим максимальное k такое, что $A_k=a_1+a_2+...+a_k$ не превосходит $\frac{S}{2}$.

а) $A_k<\frac{S}{2}$. Тогда числа A_k и $B_k=a_{k+2}+...+a_n=S-A_k-a_{k+1}$ являются собственными делителями числа S, меньшими $\frac{S}{2}$, значит оба они не больше $\frac{S}{3}$. Следовательно, $a_{k+1}=S-A_k-B_k\geq S-2\frac{S}{3}=\frac{S}{3}$, откуда $\frac{S}{3}=\frac{n(n+1)}{6}\leq a_{k+1}\leq n$ и $n\leq 5$.

б) $A_k=\frac{S}{2}$. Тогда числа $A_{k-1}=a_1+a_2+...+a_{k-1}=\frac{S}{2}-a_k$ и $B_k=a_{k+2}+...+a_n=\frac{S}{2}-a_{k+1}$

являются различными собственными делителями числа S, меньшими $\frac{S}{2}$, значит одно из них не больше $\frac{S}{4}$, можно считать, $A_{k-1} \le \frac{S}{4}$. Тогда $a_k = \frac{S}{2} - A_{k-1} \ge \frac{S}{4}$, откуда $\frac{S}{4} = \frac{n(n+1)}{8} \le a_k \le n$ и $n \le 7$. Более того, при $n = 6$ случай б) невозможен из-за нечётности S. При $n = 7$ число S не делится на 3, поэтому один из делителей A_{k-1} и B_k не превосходит $\frac{S}{5}$, что позволяет улучшить оценку: $\frac{S}{2} - \frac{S}{5} = \frac{3\mathrm{S}}{10} = \frac{3\mathrm{n}(n+1)}{20} \le a_k \le n$, откуда $n \le \frac{20}{3} - 1 = \frac{17}{3}$ и $n \le 5$.

Критерии проверки.: Нахождение примеров для всех $n = 3,4,5$: 1 балл. Оценка $n \le 7$: 3 балла. Оценка $n \le 5$: 6 баллов.