

## Всесибирская открытая олимпиада школьников 2015-2016 г.г. по математике

### Заключительный этап

#### 10 класс

28 февраля 2016    *Время написания работы 4 астрономических часа    Каждая задача оценивается в 7 баллов*

**10.1.** Найти все натуральные числа  $n$ , такие, что  $\frac{1}{n} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{pq}$  для некоторых простых  $p$  и

$q$ .

**10.2.** По координатной плоскости, стартуя в начале координат, прыгает кузнечик. Первый прыжок длины один сантиметр направлен вдоль оси  $OX$ , каждый следующий прыжок на 1 см длиннее предыдущего, и направлен перпендикулярно предыдущему в одну из двух сторон по его выбору. Сможет ли кузнечик после 31-ого прыжка оказаться в начале координат?

**10.3.** Найти все функции  $f(x)$ , определённые на всей числовой прямой, удовлетворяющие уравнению  $f(y - f(x)) = 1 - x - y$  для произвольных  $x$  и  $y$ .

**10.4.** Две окружности пересекаются в точках  $P$  и  $M$ . На первой окружности выбрана произвольная точка  $A$ , отличная от  $P$  и  $M$  и лежащая внутри второй окружности, лучи  $PA$  и  $MA$  вторично пересекают вторую окружность в точках  $B$  и  $C$  соответственно. Доказать, что прямая, проходящая через  $A$  и центр первой окружности, перпендикулярна  $BC$ .

**10.5.** Найдутся ли пять последовательных натуральных чисел таких, что если обозначить их буквами  $a, b, c, d, e$  в некотором порядке, то выполнится равенство  $(a + b)(b + c)(c + d)(d + e)(e + a) = (a + c)(c + e)(e + b)(b + d)(d + a)$ ?

## Всесибирская открытая олимпиада школьников 2015-2016 г.г. по математике

### Заключительный этап

#### 10 класс

28 февраля 2016    *Время написания работы 4 астрономических часа    Каждая задача оценивается в 7 баллов*

**10.1.** Найти все натуральные числа  $n$ , такие, что  $\frac{1}{n} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{pq}$  для некоторых простых  $p$  и

$q$ .

**10.2.** По координатной плоскости, стартуя в начале координат, прыгает кузнечик. Первый прыжок длины один сантиметр направлен вдоль оси  $OX$ , каждый следующий прыжок на 1 см длиннее предыдущего, и направлен перпендикулярно предыдущему в одну из двух сторон по его выбору. Сможет ли кузнечик после 31-ого прыжка оказаться в начале координат?

**10.3.** Найти все функции  $f(x)$ , определённые на всей числовой прямой, удовлетворяющие уравнению  $f(y - f(x)) = 1 - x - y$  для произвольных  $x$  и  $y$ .

**10.4.** Две окружности пересекаются в точках  $P$  и  $M$ . На первой окружности выбрана произвольная точка  $A$ , отличная от  $P$  и  $M$  и лежащая внутри второй окружности, лучи  $PA$  и  $MA$  вторично пересекают вторую окружность в точках  $B$  и  $C$  соответственно. Доказать, что прямая, проходящая через  $A$  и центр первой окружности, перпендикулярна  $BC$ .

**10.5.** Найдутся ли пять последовательных натуральных чисел таких, что если обозначить их буквами  $a, b, c, d, e$  в некотором порядке, то выполнится равенство  $(a + b)(b + c)(c + d)(d + e)(e + a) = (a + c)(c + e)(e + b)(b + d)(d + a)$ ?