Всесибирская олимпиада школьников 2015-2016 г.г. по математике
Второй этап
9 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

9.1. Петя выписал на доске 10 целых чисел (не обязательно различных). Потом он посчитал попарные произведения (то есть каждое из написанных чисел умножил на каждое другое). Среди них оказалось ровно 15 отрицательных. Сколько на доске было написано нулей?

Ответ: 2.

Решение. Пусть на доске A положительных чисел и B отрицательных. Тогда $A+B\leq 10$ и $A\cdot B=15$. так как отрицательное произведение получается, когда мы перемножаем отрицательное и положительное число. Отсюда легко понять, что числа A и B – это числа 3 и 5 (1). Значит, $A+B=8$ и на доске ровно два нуля.

Критерии. Правильный ответ без обоснования – 1 балл. Верно найдено промежуточное соотношение (1) – 4 балла. Правильный ответ с обоснованием – 7 баллов.

9.2. В трапеции одна боковая сторона вдвое больше другой, а сумма углов при большем основании равна 120 градусов. Найти углы трапеции.

Ответ. 90 и 30 градусов.

Решение. Обозначим вершины трапеции за A,B,C,D, с большим основанием AD, считаем CD вдвое больше AB. Выберем на AD точку E такую, что BE параллелен (и равен) CD и обозначим за M середину отрезка BE. Тогда треугольник ABM равнобедренный с углом 60 градусов при вершине B, следовательно, равносторонний и точка M равноудалена от A,B и E. Значит, M — центр окружности, содержащей точки A,B и E, а BE — её диаметр. Угол BAE вписанный и опирается на этот диаметр, следовательно, его величина равна 90 градусов, тогда величина угла BAD тоже равна 90 градусов, а угла CDA - равна 30 градусов.

Критерии. Идея построения отрезка BE: 2 балла.

9.3. Натуральные числа a,b,c таковы, что $a^2+b^2+c^2$ делится на $ab+bc+ac$ и $a+b+c$ - простое число. Доказать, что $a=b=c=1$.

Доказательство. Запишем $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$, из условия следует, что правая часть делится на $ab+bc+ac$, следовательно, и $(a+b+c)^2$ делится на $ab+bc+ac$. По условию число $(a+b+c)^2$ является квадратом простого числа, значит его делителями, отличными от 1 могут быть только $a+b+c$ и само $(a+b+c)^2$. В первом случае $ab+bc+ac=a+b+c$ и равенство возможно только при $a=b=c=1$. Во втором случае $(a+b+c)^2=ab+bc+ac$, откуда $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac=0$, что невозможно при натуральных a,b,c .

Критерии. Идея того, что $(a+b+c)^2$ делится на $ab+bc+ac$: 2 балла.
Доказательство первого случая: 3 балла. Рассмотрение второго случая: 2 балла.

9.4. N различных натуральных чисел, не превосходящих 1000, записаны по кругу так, что сумма любых двух из них, стоящих через одного, делится на 3. Найти максимально возможное значение N.
Ответ. 664.
Решение. Рассмотрим остатки от деления чисел на 3. Делимость на 3 обозначает, что в каждой паре чисел, стоящих через одно, либо оба числа делятся на 3, либо одно имеет при делении на 3 имеет остаток 1, а другое 2. Из чисел от 1 до 1000 на 3 делятся 333, остаток 1 дают 334, остаток 2 дают 333.
1) Пусть N нечётно. Тогда остатки 1 и 2 не смогут чередоваться по всему кругу, следовательно, все числа на кругу будут делиться на 3 и будет их не больше 333.
2) Пусть N чётно. Числа разбиваются на два цикла равной длины N/2: стоящие на местах с чётными номерами и стоящие на местах с нечётными номерами. В каждом из них либо все числа делятся на 3, либо по очереди дают остатки 1 и 2.
Цикл с числами, делящимися на 3 имеет длину не больше 333. Цикл с чередующимися остатками имеет чётную длину, не превосходящую 666.
Если среди выписанных есть числа, делящиеся на 3, то есть цикл из таких чисел длины не больше 333. Второй цикл тогда должен был бы состоять из не превосходящего 333 чётного количества чисел, с остатками 1 и 2, то есть из не более, чем 332 чисел. Тогда всех чисел было бы не больше 664. Это количество достигается: один цикл содержит делящиеся на 3 числа от 3 до 996, второй: все числа от 1 до 498, не делящиеся на 3.
Если же чисел, делящихся на 3 нет, то длины циклов равны и чётны, поэтому всего должно быть выписано не превосходящее 667 и делящееся на 4 количество чисел, дающих остатки 1 и 2, то есть тоже не больше 664.
Критерии. Рассмотрение случая 1) N нечётно: 1 балл. Рассмотрения случая 2) N чётно- идея двух циклов: 1 балл, оценка длины каждого цикла: 1 и 2 балла соответственно. Построение примера: 2 балла.

9.5. На шахматную доску размера 8 на 8 произвольным образом уложены 8 фигурок домино, каждая из которых занимает две соседних по стороне клетки. Разные домино не имеют общих клеток. Доказать, что на доске всегда найдётся квадрат размера 2 на 2 клетки, ни одна клетка которого не закрыта домино. Верно ли это, если на доске уложены 9 домино?
Ответ. Для 9 домино это неверно.
Решение. На доске 8 на 8 квадрат размера 2 на 2 клетки можно выбрать 49 способами, а каждая фигурка домино имеет хотя бы одну общую клетку максимум с 6 квадратиками 2 на 2. Следовательно, 8 фигурок домино «закрывают» клетки максимум в 48 квадратиках 2 на 2, поэтому найдётся хотя бы один, ни одна клетка которого не закрыта домино.
Пример 9 домино, уложенных так, что в каждом квадрате 2 на 2 хотя бы одна клетка будет закрыта одним из домино: в шахматной записи домино лежат так (b2,b3),(d2,d3),(e4,e5),(e6,e7),(g6,g7),(b5,c5),(b7,c7),(f2,g2),(f4,g4).
Критерии. Доказательство для 8 домино: 5 баллов. Отрицательный пример для 9 домино: 2 балла.