9 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

9.1. Из горячего крана ванна заполняется за 17 минут, а из холодного — за 11 минут. Через сколько минут после открытия горячего крана нужно открыть холодный, чтобы к моменту наполнения ванны горячей воды в ней было на треть больше, чем холодной?

Ответ. Через 5 минут.

Решение. Пусть объём ванны равен V, тогда к моменту её наполнения в ней должно быть $\frac{3}{7}V$ холодной воды и $\frac{4}{7}V$ горячей. Скорость наполнения ванны холодной и горячей водой равны $\frac{V}{11}$ и $\frac{V}{17}$ соответственно. Следовательно, искомое время равно разности времён наполнения $\frac{4}{7}V$ ванны горячей водой и наполнения $\frac{3}{7}V$ ванны холодной водой, то есть $\frac{4}{7}V/\frac{V}{17}-\frac{3}{7}V/\frac{V}{11}=\frac{68-33}{7}=5$ минут.

Указания. Ответ с проверкой: 2 балла. Составление уравнений: 3 балла.

9.2. Можно ли представить число 99...99 (всего 9 девяток) в виде суммы двух натуральных чисел, суммы цифр которых одинаковы?

Ответ. Нельзя.

Решение. Пусть можно представить число А=99...99 (всего 9 девяток) в виде суммы двух чисел В и С, суммы цифр которых одинаковы. Если при сложении цифр последних разрядов В и С происходит переход единицы в предыдущий разряд, то последняя цифра суммы не превосходит 8. Но в последнем разряде А стоит девятка, поэтому перехода единицы не происходит и сумма цифр последних разрядов В и С равна 9. Аналогично рассуждая слева направо для оставшихся разрядов, видим, что в каждом разряде В и С сумма цифр равна 9 и перехода единицы не происходит. Тогда сумма цифр В плюс сумма цифр С, равная удвоенной сумме цифр В, должна равняться сумме цифр А, то есть 81 — нечётному числу. Противоречие.

9.3. Найти минимальное натуральное число n такое, что в любом множестве из n различных натуральных чисел, не превосходящих 1000, всегда можно выбрать два числа, большее из которых не делится нацело на меньшее.

Ответ. $n = 11$.

Решение. Среди 10 первых степеней двойки $1 = 2^0, 2 = 2^1, 4 = 2^2, \ldots, 512 = 2^9$, в каждой паре чисел большее делится на меньшее, следовательно, $n \geq 11$.

С другой стороны, пусть в некотором множестве из $n \geq 11$ чисел большее число каждой пары чисел делится на меньшее. Расположим все числа по возрастанию, из предположения следует, что каждое следующее число как минимум в 2 раза больше предыдущего. Значит, самое большое число не меньше, чем в $2^{10} = 1024$ раз больше первого, то есть больше 1000 - противоречие.

Указания. Доказано $n \geq 11$ с примером: 3 балла. Доказано только $n \leq 11$ (вторая часть): 4 балла.

9.4. Через точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника провели прямые, соответственно параллельные биссектрисам противоположных углов. Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке.

Доказательство. Рассмотрим любой из треугольников, образованных вершиной исходного треугольника и двумя точками касания вписанной окружности сс смежными этой вершине сторонами. Поскольку отрезки касательных из вершины к окружности равны, этот треугольник равнобедренный и его биссектриса перпендикулярна отрезку, соединяющему точки касания. Следовательно прямая, параллельная этой биссектрисе, проходящая через третью точку касания, является высотой треугольника, образованного точками касания вписанной окружности со сторонами исходного треугольника. Утверждение задачи следует теперь из теоремы о том, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

Указания. Замечено, что биссектриса перпендикулярна отрезку, соединяющему точки касания: 2 балла.

9.5. В каждой клетке таблицы 10 на 10 записан минус. За одну операцию разрешается одновременно менять на противоположные знаки во всех клетках некоторого столбца и некоторой строки (плюс на минус и наоборот). За какое минимальное количество операций можно добиться того, что все знаки в таблице станут плюсами?

Ответ. За 100 операций.

Решение. Всего в строке и столбце, проходящих через данную клетку 19 клеток, поэтому, если мы проделаем операции со всеми парами строк и столбцов таблицы (всего $10 \times 10 = 100$ операций), то каждый знак в таблице поменяется 19 раз, став из минуса плюсом, поэтому 100 операций достаточно.

Операцию замены знаков во всех клетках некоторого столбца и некоторой строки будем называть операцией относительно клетки-пересечения этих строки и столбца. Клетки,

относительно которых мы делали операции, назовём красными, остальные — синими.
Строки и столбцы, содержащие чётное число красных клеток назовём чётными, а содержащие нечётное число красных клеток — нечётными. Допустим, можно поменять все знаки в таблице меньше чем за 100 операций, тогда рассмотрим некоторую синюю клетку A в строке X и столбце Y. Чтобы знак в A поменялся, нужно, чтобы, чтобы X и Y вместе содержали нечётное количество красных клеток, можно считать строку X чётной, а столбец Y — нечётным. Заметим, что на пересечении строки и столбца одинаковой чётности должна стоять красная клетка, а на пересечении строки и столбца разной чётности — синяя, иначе знак в этой клетке после всех операций не изменится. Следовательно, количество красных клеток в каждой чётной строке равно числу чётных столбцов, а количество синих — числу нечётных столбцов таблицы. Есть хотя бы одна чётная строка X, значит, всего в таблице чётное число нечётных столбцов. Но количество красных клеток в каждой нечётной строке (нечётное!) равно числу нечётных столбцов, то есть чётному числу - противоречие с тем, что есть хотя бы один нечётный столбец. Следовательно, нельзя обойтись меньше, чем 100 операциями.
Указания. Верный пример для 100 операций с пояснениями: 2 балла. Доказательство минимальности 100: 5 баллов.