9 класс

28 февраля 2016г Время написания работы 4 астрономических часа Каждая задача оценивается в 7 баллов

9.1. Известно, что сумма цифр числа A равна 59, а сумма цифр числа B равна 77. Какую минимальную сумму цифр может иметь число A+B?

Ответ. 1.

Решение. Достаточно рассмотреть A=9999995, B=999999990000005, тогда A+B=1000000000000000, сумма цифр равна 1 - минимально возможная.

Критерии оценивания. Верный ответ и пример: 7 баллов. Наличие арифметических ошибок: минус 1-2 балла. Любой другой ответ: 0 баллов.

9.2. На острове проживают 20 человек, часть из них рыцари, которые всегда говорят правду, а остальные — лжецы, которые всегда лгут. Каждый островитянин точно знает, кто из остальных рыцарь, а кто — лжец. На вопрос приезжего, сколько рыцарей проживают на острове, первый из островитян ответил: «Ни одного», второй: «Не более одного», третий: «Не более двух», четвёртый: «Не более трёх» и т. д., двадцатый заявил: «Не более девятнадцати». Так сколько же рыцарей проживают на острове?

Ответ. 10.

Решение. Если бы первый островитянин был рыцарем, то своим ответом он бы солгал, чего не может быть. Следовательно, первый — лжец и всего рыцарей на острове не больше 19. Значит, двадцатый островитянин своим ответом сказал правду, поэтому он рыцарь, в частности, на острове не меньше одного рыцаря. Тогда, если бы второй островитянин оказался рыцарем, их вместе с двадцатым было бы уже два, и он бы солгал, значит, второй — лжец и всего рыцарей не больше 18. Поэтому девятнадцатый сказал правду и он — рыцарь. Продвигаясь так дальше, несложно убедиться, что все островитяне с первого по десятого — лжецы, а все с 11-ого по 20-ого — рыцари.

Критерии оценивания. Установлено, что первый - лжец: 1 балл. Установлено, что первый - лжец а второй- рыцарь: 2 балла. Дан верный ответ и построен пример к нему с проверкой: 3 балла. Любой неверный ответ: 0 баллов.

9.3. Найти величину выражения $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}$, если известно, что $\frac{1}{y+z}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{x+y}=5$ и $x+y+z=2$.

Ответ. 7.

Решение. Преобразуем: $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}=\frac{x+y+z}{y+z}+\frac{y+x+z}{x+z}+\frac{z+x+y}{x+y}-3=$

$= (x+y+z)\left(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{x+y}\right)-3=2\cdot 5-3=7$.

Критерии оценивания. Наличие арифметических ошибок: минус 1-2 балла. На каком-нибудь примере подсчитан верный ответ: 1 балл.

9.4. В прямоугольном треугольнике ABC отмечены: точка K — середина гипотенузы AB и на катете BC точка M такая, что BM : MC = 2. Пусть отрезки AM и CK пересекаются в точке P. Докажите, что прямая KM касается описанной окружности треугольника AKP.

Доказательство. 1.Пусть T — середина отрезка BM, длины отрезков BT, TM и MC равны. По теореме, обратной теореме Фалеса, прямые AM и KT параллельны, поэтому ∠KAM= ∠BKT.

2. В прямоугольном треугольнике ABC точка K — середина гипотенузы AB, поэтому ∠KCB= ∠KBC.

3. Треугольники BKT и MKC равны по двум углам ∠KCM= ∠KCB= ∠KBC=∠KBT и двум парам равных соответствующих сторон KC=KB и CM=BT. Следовательно, ∠MKC= ∠BKT=∠KAM=∠KAP. Значит, угол между хордой KP и прямой KM, равный ∠MKC, равен вписанному углу KAP, опирающемуся на хорду KP, поэтому KM — касательная к описанной окружности треугольника AKP в точке K.

Критерии оценивания. Построена точка T и замечено, что ∠KAM= ∠BKT.: 1 балл. Показано, что треугольники BKT и MKC равны: 2 балла. Доказано ∠MKC= ∠BKT=∠KAM: 2 балла.

9.5. В футбольном турнире участвовало 10 команд, каждая из которых с каждой из остальных сыграла по одному матчу. По окончании турнира выяснилось, что для любой тройки команд найдутся две команды из этой тройки, набравших равное число очков в играх с командами из этой тройки. Доказать, что все команды можно разбить не более, чем на три подгруппы таких, что любые две команды из одной подгруппы сыграли между собой вничью. За выигрыш в футболе команда получает 3 очка, за ничью — 1 очко и за проигрыш — 0 очков.

Версия от 18.02.2016

Доказательство. 1. Сначала выясним, как могли сыграть три команды между собой с соблюдением условий задачи. Если внутри тройки не было ничьих, единственным подходящим вариантом будет (Т1), когда каждая проиграла и выиграла по одному матчу, у всех по 3 очка. Если ничья была ровно одна, то сделавшие её команды либо обе выиграли у третьей (Т2: 4,4 и 0 очков), либо обе проиграли третьей (Т3: 1,1 и 6 очков). Случай ровно с двумя ничьими невозможен. Подходит и вариант с тремя ничьими (Т4): все набирают по 2 очка.
2. Из пункта 1 следует, что: а) Если две А и Б команды сыграли между собой вничью, то результаты матчей любой другой команды с А и с Б одинаковы. б) Если команда сыграла с командами А и Б с одинаковым результатом, то А и Б сыграли между собой вничью.
3. Докажем, что в турнире была хотя бы одна ничья. В противном случае, всего имеем 45 побед во всех матчах, значит, найдётся команда А, выигравшая не меньше 5 матчей. Рассмотрим команды Б и В, проигравшие А, очевидно, что тройка А,Б,В не удовлетворяет условию задачи.
4. Обозначим какие-нибудь команды, сыгравшие между собой вничью, за А и Б. В первую подгруппу включим все команды, сыгравшие с А и Б вничью, во вторую все команды, выигравшие у А и Б, в третью — все команды, проигравшие А и Б. Из пункта 2.б) следует, что в пределах каждой подгруппы все команды сыграли между собой вничью.
Критерии оценивания. Пункт 1: 2 балла. Пункт 2: 1 балл. Пункт 3: 1 балл. Пункт 4: 3 балла.

Критерии определения победителей и призеров
Всесибирской открытой олимпиады школьников по математике
(2015-2016 уч. год)

Согласно Положению победители и призеры олимпиады были определены по результатам Заключительного этапа Олимпиады. Общее количество победителей и призеров составило 380 человек из 1578 участников, что составляет 24,08 %. Количество победителей составило 85 человек, что составляет 5,38 %.

Основываясь на **общем рейтинге** участников и учитывая **наличие заметных разрывов** в баллах, набранных группами участников в верхней части рейтинга, жюри Олимпиады разработало следующие критерии определения победителей и призеров:
<u>Максимальное возможное количество баллов</u> – 35 баллов.

11 класс:

<u>победители:</u>
участники, набравшие более 77% от максимального количества баллов, т.е. от 27 до 35 баллов;
<u>призеры:</u>
2 степени – более 62 % от максимального количества баллов, т.е. от 22 до 26 баллов
3 степени – более 51 % от максимального количества баллов, т.е. от 18 до 21 баллов

10 класс:

<u>победители:</u>
участники, набравшие более 85 % от максимального количества баллов, т.е. от 30 до 35 баллов;
<u>призеры:</u>
2 степени – более 62 % от максимального количества баллов, т.е. от 22 до 29 баллов
3 степени – более 51 % от максимального количества баллов, т.е. от 18 до 21 баллов

9 класс:

<u>победители:</u>
участники, набравшие более 85 % от максимального количества баллов, т.е. от 30 до 35 баллов;
<u>призеры:</u>
2 степени – более 65 % от максимального количества баллов, т.е. от 24до 29 баллов
3 степени – более 51 % от максимального количества баллов, т.е. от 18 до 23 баллов

8 класс:

<u>победители:</u>
участники, набравшие более 82% от максимального количества баллов, т.е. от 29 до 35 баллов;
<u>призеры:</u>
2 степени – более 62 % от максимального количества баллов, т.е. от 22 до 28 баллов
3 степени – более 48 % от максимального количества баллов, т.е. от 17 до 21 баллов

7 класс:

<u>победители:</u>
участники, набравшие более 85 % от максимального количества баллов, т.е. от 30 до 35 баллов;
<u>призеры:</u>
2 степени – более 71 % от максимального количества баллов, т.е. от 24 до 29 баллов
3 степени – более 42 % от максимального количества баллов, т.е. от 15 до 21 баллов

Сопредседатель жюри по математике А.Ю.Авдюшенко