Всесибирская олимпиада школьников 2015-2016 г.г. по математике
Второй этап
8 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

8.1. Лада, Лера и Лара решали задачи. Оказалось, что Лада решила настолько же больше задач, чем Лера, насколько Лера решила больше, чем Лара. Могло ли оказаться, что они решили вместе 2015 задач?
Ответ: нет.
Решение: Пусть Лара решила x задач, а Лера решила x + a задач. Тогда Лада решила x + 2a задач, а все вместе девочки решили $3x + 3a = 2015$ задач. Однако, 2015 на три не делится, получаем противоречие.
Критерии: Только ответ – 0 баллов.

8.2. Число уменьшили на 1%, затем остаток на 2%, затем остаток на 3% и так далее, пока в конце концов остаток не уменьшили на 30%. Другое число сначала уменьшили на 30%, затем остаток на 29% и так далее, пока остаток не уменьшили на 1%. Результаты оказались равны. Какое исходное число было больше?
Ответ: они были равны.
Решение: Если первое число было равно a, то итоговое число равно $0{,}99*0{,}98*\ldots*0{,}70*a$. Если второе число равно b, то итоговое число равно $0{,}70*0{,}71*\ldots*0{,}99*b$. Так как по условию $0{,}99*0{,}98*\ldots*0{,}70*a = 0{,}70*0{,}71*\ldots*0{,}99*b$, то $a = b$.
Критерии: Только ответ, ответ с проверкой – 1 балл.

8.3. В параллелограмме провели диагонали, а затем провели биссектрисы всех углов, образованных ими, до пересечения со сторонами параллелограмма. Эти точки назвали соответственно *A, B, C* и *D*. Докажите, что *ABCD* – ромб.
Решение: Отметим, что биссектрисы смежных углов образуют прямой угол, а биссектрисы вертикальных углов – образуют прямую. Таким образом, диагонали четырёхугольника *ABCD* перпендикулярны. Кроме этого, параллелограмм имеет центр симметрии – точку пересечения диагоналей *O*. При этой симметрии отрезки биссектрис *OA, OB* переходят соответственно в отрезки биссектрис *OC* и *OD*. Значит, диагонали четырёхугольника *ABCD* точкой пересечения делятся пополам, то есть *ABCD* – параллелограмм, и перпендикулярны, то есть *ABCD* – ромб.
Критерии: Не пояснено, почему диагонали *ABCD* перпендикулярны – снимать 3 балла. Не пояснено, почему диагонали *ABCD* точкой пересечения делятся пополам – снимать 3 балла.

8.4. Назовём *средним магическим* набора чисел отношение их суммы к их произведению. Изначально на доске записано несколько (больше одного) различных натуральных чисел. После того, как с неё стёрли самое маленькое из них, среднее магическое всех чисел, записанных на доске, увеличилось в три раза. Найдите, чему были равны числа на доске.

Ответ: 4 и 12; 4, 5, 7.

Решение 1: Пусть исходная сумма $s + a$, произведение ap, а самая маленькое число a. Тогда получим и упростим следующее соотношение:

$$3(s+a)/ap = s/p,$$
$$3s/a +3 = s,$$
$$1/a +1/s = 1/3,$$

С одной стороны, это выражение можно оценить так:

$$2/a > 1/a +1/s =1/3,$$
$$6 > a,$$

С другой стороны:

$$1/a < 1/3,$$
$$3 < a,$$

Если $a = 5$, то $s = 7{,}5$, не натуральное число.
Если $a = 4$, то $s = 12$.
Если всего чисел было два, то это 4 и 12.
Так как исходные числа различны, то их было не больше трёх (первое 4, второе не меньше 5, третье не меньше 6, следующее должно было бы быть не меньше 7, но тогда $s > 12$).
Если чисел три и второе больше 5, то есть хотя бы 6, то и третье больше 6, но тогда $s > 12$, значит, если чисел было три, то первое 4, второе – 5, оставшееся определяется однозначно.
Критерии: Только ответ, ответ с проверкой – 1 балл. Получено неравенство $6 > a$ – плюс 1 балл. Получено неравенство $3 < a$ – плюс 1 балл. Рассмотрен случай $a = 5$ – плюс 1 балл.

Решение 2: пусть на доске изначально записан набор $a_1, a_2, \dots, a_n$, где a_1- наименьшее число. Тогда $a_1 + \dots + a_n = ka_1 \cdot \ldots \cdot a_n$, и $a_2 + \dots + a_n = 3ka_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ для некоторого $k > 0$. Поделим первое равенство на второе и обозначим $N = a_2 + \dots + a_n$. Получим $\frac{a_1+N}{N} = \frac{a_1}{3}$, или $a_1 = \frac{3N}{N-3}$.
НОД($3N$, N-3)=НОД(9,N-3) и равен N-3, так как $3N$ делится на N-3 нацело. Отсюда, так как НОД(9, N-3) = 1,3 или 9, получаем три варианта: N-3 = 1,3 или 9.

1)$N = 4$, следовательно, $a_1 = 12$. Но тогда сумма всех чисел $a_1 + N = 16$, а значит, a_1 не могло быть наименьшим числом на доске.
2)$N = 6$, следовательно, $a_1 = 6$. Аналогично получаем противоречие.
3)$N = 12$, следовательно, $a_1 = 4$. Тогда получаем, что сумма нескольких различных натуральных чисел, больших 4, равна 12. Получаем два варианта: либо $a_2 = 12$, либо $a_2 = 5, a_3 = 7$. Легко проверить, что оба эти варианта подходят.
Критерии: только ответ, ответ с проверкой – 1 балл. Получено, что НОД(9, N-3) = 1,3 или 9 – плюс три балла. Разобраны оба случая 1) и 2) – плюс 1 балл.

8.5. У Даши есть 4 монеты, одна из которых фальшивая, отличная по весу от настоящих. Разрешается брать две группы монет и спрашивать у Даши, какая из них легче. Если такая есть, то Даша указывает на неё. Если же группы оказываются равны по весу, то Даша указывает на произвольную группу. Как за 3 вопроса выяснить, легче или тяжелее фальшивая монета и найти её?

Решение: Пронумеруем монеты. Проведем три испытания: 1 и 2 против 3 и 4, 1 и 3 против 2 и 4, 1 и 4 против 2 и 3. Ясно, что каждый раз Даша будет показывать на легкую группу, потому что во взвешивании участвуют все монеты.

Без ограничения общности будем считать, что сначала группа 3 и 4 легче.

Если во второй раз правая группа снова легче, то либо 1 – тяжёлая, либо 4 – лёгкая. Иначе, либо 2 – тяжёлая, либо 3 – лёгкая.

В любом случае, третье испытание разрешает этот вопрос, потому что «подозрительные» монеты будут находится в одной группе.

Критерии: Верный алгоритм без доказательства того, что он работает – 3 балла. Верное решение без разбора одного случая – снять 2 балла. Если не разобрано несколько случаев – ставить не больше 3 баллов.