8 класс

8.1. На олимпиаде встретились гимназисты, лицеисты и обычные школьники. Некоторые из них встали в круг. Гимназисты всегда врут обычным школьникам, лицеисты — гимназистам, а обычные школьники — лицеистам. Во всех остальных случаях учащиеся говорят правду. Каждый сказал своему правому соседу: «Я — гимназист». Сколько ребят из обычных школ было в этом круге?

Ответ: ребят из обычной школы в кругу не было.

Решение: Пусть в кругу был обычный школьник. Рассмотрим его левого соседа. Это не мог быть другой обычный школьник или лицеист, потому что они бы сказали правду. Но и гимназистом он быть не может, так как тогда бы он соврал, а он сказал правду. Значит, сосед обычного школьника никем не может быть. Следовательно, обычные школьники в круг не встали.

Критерии: только ответ – 0 баллов, ответ с проверкой – 1 балл. За утверждение, что справа от гимназиста обязательно стоит гимназист/лицеист (на самом деле может стоить или лицеист, или гимназист) – снимать 3 балла.

8.2. В автобусе имеются одноместные и двухместные сидения. Утром в автобусе сидело 13 человек, а полностью свободных сидений было 9. Вечером в автобусе сидело 10 человек, а полностью свободными были 6 сидений. Сколько сидений в автобусе?

Ответ: 16.

Решение: Если утром пассажиры сели на 6 двойных сидений (то есть как можно плотнее), то они заняли 7 сидений, ещё 9 сидений было свободно. Итого: 16 сидений. Если они сидели не так плотно, то они заняли больше сидений. То есть в автобусе не меньше 16 сидений, с одной стороны.

С другой стороны, если вечером каждый пассажир занял по сидению, то занято было 10 сидений, ещё 6 было свободно, всего – 16 сидений. Если некоторые сели вместе, то сидений было бы меньше. Значит, сидений не больше 16.

Итак, сидений не больше, но и не меньше 16. Значит, их ровно 16.

Критерии: только ответ, ответ с проверкой – 1 балл, оценка только с одной стороны – 3 балла, за отсутствие примера не снимать баллов.

8.3. На доске записаны натуральные числа от 1 до 15. Лера выбирает два числа и находит их произведение, а Лада получает оставшиеся тринадцать чисел и находит их сумму. Могут ли результаты девочек совпасть?

Ответ: не могут.

Решение: Пусть Лера забрала числа a и b ($a < b$). Тогда, если числа девочек равны, то:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 15 - a - b = ab$$

Преобразуем:

$$16 * 15 : 2 = ab + a + b$$
$$8 * 15 + 1 = ab + a + b + 1$$
$$121 = (a + 1)(b + 1)$$

Так как левая часть делится на 121, то и правая делится на 121. Раз $a < b$, то вариант $a + 1 = b + 1 = 11$ невозможен. Значит, $a + 1 = 1$, $b + 1 = 121$, но числа должны быть больше 0 и меньше 15, следовательно, и этот вариант невозможен.

Значит, результаты совпасть не могли.

Критерии: при подобном решении за потерю одного случая ($a + 1 = 1$, $b + 1 = 121$ или $a + 1 = b + 1 = 11$) – снимать 1 балл.

При решении перебором за потерю одного случая – снимать 1 балл, иначе – оценивать задачу исходя из 3 баллов.

8.4. В стране 15 городов, некоторые из которых соединены дорогами. Каждому городу присваивается номер, равный количеству выходящих из него дорог. Оказалось, что между городами с одинаковыми номерами дорог нет. Какое наибольшее количество дорог может быть в стране?

Ответ: 85.

Решение: Упорядочим номера городов по невозрастанию:

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{15}.$$

Заметим, что городов с номером $15 - i$ не больше i. Действительно, если таких городов хотя бы $i + 1$, то они не могут быть соединены друг с другом, а значит могут быть соединены не больше чем с $15 - (i + 1) = 14 - i$ городами, а должны быть соединены с $15 - i$, противоречие.

Значит, максимальный номер не больше 14, следующие два – не больше 13, следующие три – не больше 12, следующие четыре не больше 11, оставшиеся 5 не больше 10. Общая сумма номеров не больше 14+2*13+3*12+4*11+5*10 = 170. Так как каждая дорога вносит вклад в номера ровно двух городов, то общее количество дорог не больше 170 : 2 = 85.

Покажем, что этого можно достичь. Разобьём страну на 5 областей. В первой – один город, во второй – два, в третье – три и т.д. Пусть города будут соединены тогда и только тогда, когда лежат в разных областях. Тогда первый город соединён со всеми другими (имеет номер 14) , города из второй области со всеми, кроме друг друга (и имеют номер 13), города из третьей области соединены с 15 - 3 = 12 городами, из четвёртой с 15 - 4 = 11 городами и из пятой области с 15 - 5 = 10 городами.

Критерии: оценка – 4 балла, пример – 2 балла

8.5. Дан выпуклый четырёхугольник *ABCD* со стороной *AD* равной 3. Диагонали *AC* и *BD* пересекаются в точке *E,* причём известно, что площади треугольников *ABE* и *DCE* равны 1. Найдите сторону *BC*, если известно, что площадь *ABCD* не превосходит 4.

Ответ: 3.

Решение: Треугольники *ABD* и *ACD* имеют одинаковую площадь, так как составлены из общего *AED* и равновеликих *ABE* и *DCE*. Так как *ABD* и *ACD* имеют общее основание *AD*, то у них равны высоты, проведённые к нему. Отсюда следует, что *BC* параллельно *AD*, то есть наш четырёхугольник – трапеция.

Обозначим *BC* за x. Треугольники *BEC* и *AED* подобны, следовательно, $BE/ED = BC/AD = x/3$. Кроме того, площадь *BEC* равна *BE/ED* площади *BCD*, так как эти треугольники имеют общее основание, а их высоты относятся как *BE* к *ED*. Следовательно, площадь *BEC* равна $x/3$. Аналогично, площадь *AED* равна $3/x$.

В силу того, что площадь всего четырёхугольника не превосходит 4, $x/3 + 3/x \leq 2$.

Но сумма обратных друг другу положительных величин всегда не меньше, чем 2, причём равенство достигается только при равенстве слагаемых, то есть, в нашем случае, $x/3 = 3/x$, откуда x равен 3.

Критерии: только ответ – 0 баллов. Доказано, что *ABCD* трапеция – плюс 2 балла. Получено уравнение – плюс 1 балл. Не объяснено, почему неравенство возможно только при равенстве слагаемых – снимать 1 балл.

Критерии определения победителей и призеров
Всесибирской открытой олимпиады школьников по математике
(2015-2016 уч. год)

Согласно Положению победители и призеры олимпиады были определены по результатам Заключительного этапа Олимпиады. Общее количество победителей и призеров составило 380 человек из 1578 участников, что составляет 24,08 %. Количество победителей составило 85 человек, что составляет 5,38 %.

Основываясь на **общем рейтинге** участников и учитывая **наличие заметных разрывов** в баллах, набранных группами участников в верхней части рейтинга, жюри Олимпиады разработало следующие критерии определения победителей и призеров:
<u>Максимальное возможное количество баллов</u> – 35 баллов.

11 класс:

<u>победители:</u>
участники, набравшие более 77% от максимального количества баллов, т.е. от 27 до 35 баллов;
<u>призеры:</u>
2 степени – более 62 % от максимального количества баллов, т.е. от 22 до 26 баллов
3 степени – более 51 % от максимального количества баллов, т.е. от 18 до 21 баллов

10 класс:

<u>победители:</u>
участники, набравшие более 85 % от максимального количества баллов, т.е. от 30 до 35 баллов;
<u>призеры:</u>
2 степени – более 62 % от максимального количества баллов, т.е. от 22 до 29 баллов
3 степени – более 51 % от максимального количества баллов, т.е. от 18 до 21 баллов

9 класс:

<u>победители:</u>
участники, набравшие более 85 % от максимального количества баллов, т.е. от 30 до 35 баллов;
<u>призеры:</u>
2 степени – более 65 % от максимального количества баллов, т.е. от 24до 29 баллов
3 степени – более 51 % от максимального количества баллов, т.е. от 18 до 23 баллов

8 класс:

<u>победители:</u>
участники, набравшие более 82% от максимального количества баллов, т.е. от 29 до 35 баллов;
<u>призеры:</u>
2 степени – более 62 % от максимального количества баллов, т.е. от 22 до 28 баллов
3 степени – более 48 % от максимального количества баллов, т.е. от 17 до 21 баллов

7 класс:

<u>победители:</u>
участники, набравшие более 85 % от максимального количества баллов, т.е. от 30 до 35 баллов;
<u>призеры:</u>
2 степени – более 71 % от максимального количества баллов, т.е. от 24 до 29 баллов
3 степени – более 42 % от максимального количества баллов, т.е. от 15 до 21 баллов

Сопредседатель жюри по математике А.Ю.Авдюшенко