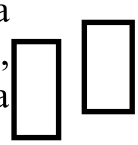
**Всесибирская олимпиада школьников 2015-2016 г.г. по математике**
**Второй этап**
**7 класс**

*Каждая задача оценивается в 7 баллов*

**7.1.** Может ли оказаться, что эту задачу правильно решит 1000 участников олимпиады, причем среди них мальчиков будет на 43 больше, чем девочек?
**Ответ**: нет.
**Решение**: Пусть $x$ девочек решили эту задачу. Тогда её решили $x$+43 мальчика. Тогда в сумме её решили 2$x$+43 = 1000 человек. Но тогда 2$x$ = 957 – нечётное число, противоречие.
**Критерии:** 6 баллов - нет пояснений откуда появилось уравнение.
6 баллов - допущена арифметическая ошибка
5 баллов - нет пояснений что обозначает переменная х в уравнениях
5 баллов - (решение без составления уравнения) сделаны какие-то вычисления, но не пояснено, что с помощью их находится и почему так можно делать.
Только ответ – 0 баллов.

**7.2.** Лада и Лера загадали по натуральному числу. Если число Лады уменьшить на 5%, а число Леры увеличить на 5%, то результаты будут равны. Оказалось, что загаданные числа — наименьшие из обладающих этим свойством. Какие числа загадали девочки?
**Ответ:** 21 и 19.
**Решение:** Пусть Лада загадала число $a$, а Лера – число $b$. Тогда новые числа 0,95$a$ и 1,05$b$ равны, то есть 0,95$a$ = 1,05$b$. Упростив это равенство, получаем, что 19$a$ = 21$b$. Левая часть делится на 19, значит и правая часть делится на 19, но так как 21 и 19 взаимно просты, то $b$ = 19$k$, отсюда $a$ = 21$k$. Среди всех таких чисел наименьшими являются 21 и 19 при $k$ = 1.
**Критерии:** Только ответ, ответ с проверкой – 1 балл. Не пояснено, почему $b$ должно делиться на 19, а $a$ – на 21 – снимать 1 балл.

**7.3.** У Ани есть клетчатый квадрат 2015 на 2015, в клетки которого она вписала действительные числа. Оказалось, что в любых трёх клетках, образующих уголок (см. рисунок, уголок можно поворачивать), сумма чисел равна 3. Докажите, что Аня поставила во все клетки 1.



**Решение:** Выделим произвольный квадратик 2 на 2 с числами $a$, $b$, $c$, $d$. Рассмотрим два уголка: с числами $a$, $b$, $c$ и с числами $b$, $c$, $d$. Тогда 3 = $a$ + $b$ + $c$ = $b$ + $c$ + $d$, откуда $a$ = $d$. Легко понять, что весь квадрат 2015 на 2015 заполнен числами $a$ и $b$ в шахматном порядке. Взяв уголки 3 = 2$a$ + $b$ = 2$b$ + $a$, понимаем, что $a$ = $b$, откуда и следует утверждение задачи.
**Критерии:** Разбор частных случаев – 0 баллов. Доказано, что поле заполнено числами $a$ и $b$ в шахматном порядке – 5 баллов.

**7.4.** Даша загадала натуральное число и утверждает, что оно не больше произведения своих цифр. Докажите, что Даша загадала однозначное число.
**Решение**: Пусть Даша загадала число $\overline{a_N a_{N-1} .. a_1 a_0}$. Тогда из её утверждения

следует, что $\overline{a_N a_{N-1} \ldots a_1 a_0} \le a_N \cdot a_{N-1} \cdot \ldots \cdot a_1 \cdot a_0$. Но, так как все цифры меньше 10, то $a_N \cdot a_{N-1} \cdot \ldots \cdot a_1 \cdot a_0 < 10^N a_N$. Значит,

$$a_N \cdot a_{N-1} \cdot \ldots \cdot a_1 \cdot a_0 < 10^N a_N \le \overline{a_N a_{N-1} \ldots a_1 a_0} \le a_N \cdot a_{N-1} \cdot \ldots \cdot a_1 \cdot a_0$$

Получаем противоречие: $a_N \cdot a_{N-1} \cdot \ldots \cdot a_1 \cdot a_0 < a_N \cdot a_{N-1} \cdot \ldots \cdot a_1 \cdot a_0$

Значит, такого быть не могло. Противоречия не возникает, только если мы не оценивали цифры в промежуточных выкладках, то есть если $n = 0$, что и значит, что число однозначное.

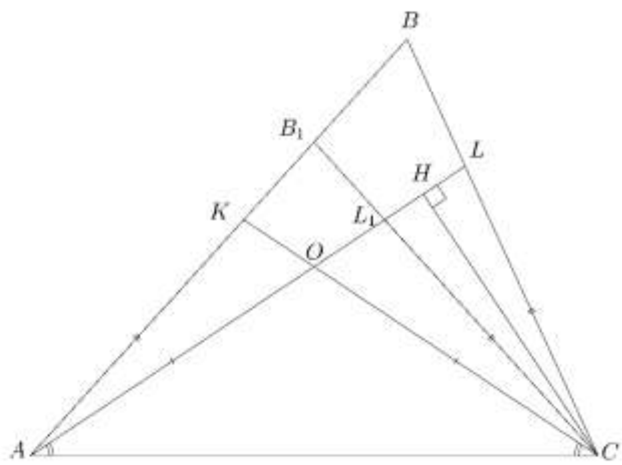
**Критерии:** Получено противоречивое неравенство, но не сделан вывод – 6 баллов.

Если рассматривались только двузначные и/или трехзначные числа - 2 балла.

**7.5.** Внутри треугольника $ABC$ выбрана точка $O$ таким образом, что $\angle OAC = \angle OCA$. Кроме того, через точку $O$ проведены прямые $AO$ до пересечения с $BC$ в точке $L$ и $CO$ до пересечения с $AB$ в точке $K$. Оказалось, что $AK = CL$. Обязательно ли $AB = BC$?

**Ответ:** нет, не обязательно.

**Решение**: Возьмём произвольный равнобедренный тупоугольный треугольник $AOC$ ($AO = OC$) и опустим перпендикуляр из $C$ на прямую $AO$. Он попадёт в точку $H$, причём $O$ будет лежать между $H$ и $A$, т.к. $\angle AOC$ – тупой. Пусть $L_1$ – произвольная точка между $O$ и $H$. Построим точку $K$ симметрично $L_1$ относительно срединного перпендикуляра к $AC$. $\angle L_1CA = \angle L_1CO + \angle OCA < \angle HCA < 90$, следовательно $\angle KAC + \angle L_1CA < 180$, а значит прямые $AK$ и $CL_1$ пересекаются в точке $B_1$, лежащей по ту же сторону от $AC$. В силу симметрии очевидно, что треугольник $ACB_1$ равнобедренный.




Отразим $L_1$ относительно $H$ в точку $L$. Теперь, если мы покажем, что прямые $CL$ и $AB_1$ пересекаются в некоторой точке $B$ с той же стороны прямой $AC$, то мы получим искомый неравнобедренный треугольник $ABC$, т.к. его углы при основании не могут быть равны из-за того, что $ACB_1$ равнобедренный.

Пусть $\angle OAC = a$, $\angle KAO = b$. Тогда $\angle HOC = 2a$. Из треугольника $HOC$ выражаем $\angle HCO = 90 - 2a$, откуда $\angle LCH = \angle HCL_1 = 90 - 2a - b$. Тогда $\angle B_1AC + \angle LCA = \angle KAO + \angle OAC + \angle OCA + \angle L_1CO + 2\angle LCH = a + b + a + b + 180 - 4a - 2b = 180 - 2a < 180$, откуда и следует искомое.

**Критерии:** Не доказано, что $AK$ и $CL_1$ пересекаются с нужной стороны от $AC$ – не снимать баллов. Не объяснено, почему при таком построении треугольник $ABC$ не может быть равнобедренным – снимать 1 балл. Не доказано, почему $CL$ и $AB_1$ пересекаются с нужной стороны от $AC$ – снимать 2 балла. Идея примера без доказательства того, что этот пример подходит – 2 балла.