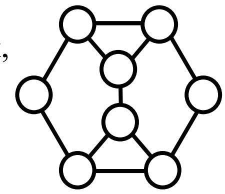
Решения заданий первого этапа Всесибирской открытой олимпиады школьников 2015-2016 г.г. по математике

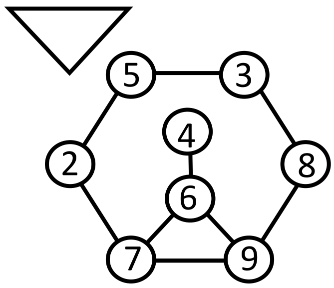
7 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

7.1. Расставите в кружки на картинке числа от 2 до 9 (без повторений) так, чтобы никакое число не делило бы нацело ни одного из своих соседей.



Решение: например, так



(на рисунке сдвинулся треугольник – это ребра, соединяющие 4-5 и 4-3)

Критерий: Любая верная расстановка, даже без пояснения – 7 баллов.

7.2. Прямоугольник разрезан на несколько прямоугольников, периметр каждого из которых – число метров, делящееся на 4. Верно ли, что периметр исходного прямоугольника делится на 4 нацело?

Ответ: Нет.

Решение: Например, прямоугольник со сторонами 1 и 2 можно разрезать на квадраты со стороной 1. Периметры квадратов равны 4, а периметр прямоугольника – 6.

Критерий: Если найден верный контрпример, но проверка не выполнена – 7 баллов.

7.3. В семье шестеро детей. Пятеро из них соответственно на 2, 6, 8, 12 и 14 лет старше младшего, причём возраст каждого ребёнка — простое число. Сколько лет младшему?

Ответ: 5, 7, 11, 13, 17 и 19

Решение: Остатки от деления на 5 разностей возрастов равны 2, 1, 3, 2 и 4, соответственно. Поэтому, если возраст младшего не делится на 5, то возраст какого-то другого ребёнка делится. Так как все числа простые, то это число равно 5. Подходит только второй ребёнок, так как иначе возраст самого младшего должен быть меньше нуля. Тогда возраста 3, 5, 9, 11, 15 и 17, но здесь не все числа простые. Значит, возраст самого младшего равен 5. Тогда остаётся один вариант и числа равны 5, 7, 11, 13, 17 и 19.

Критерий: Только ответ – 1 балл, есть догадка, что надо смотреть по модулю пять – плюс 1 балл. Рассмотрен только один из случаев, когда 5 лет первому или второму ребёнку – не больше 4 баллов.

7.4. На острове живёт нечётное число людей, причём каждый из них либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Как-то раз все рыцари заявили: “Я дружу только с 1 лжецом”, а все лжецы: “Я не дружу с рыцарями”. Кого на острове больше, рыцарей или лжецов?

Ответ: рыцарей больше

Решение: Каждый лжец дружит хотя бы с одним рыцарем. Но так как каждый рыцарь дружит ровно с одним лжецом, у двух лжецов не может быть общего друга-рыцаря. Тогда каждому лжецу можно поставить в соответствие его друга рыцаря, откуда получается, что рыцарей, по крайней мере, столько же, сколько и лжецов. Так как всего жителей на острове нечётное число, то равенство невозможно. Значит, рыцарей больше.

Критерий: Сказано, что у каждого лжеца есть друг-рыцарь – плюс 1 балл. Замечено, что общих друзей-рыцарей быть не может – плюс 2 балла. Только ответ – 0 баллов.

7.5. Есть 100 коробок, пронумерованных числами от 1 до 100. В одной коробке лежит приз, и ведущий знает, где он находится. Зритель может послать ведущему пачку записок с вопросами, требующими ответа "да" или "нет". Ведущий перемешивает записки в пачке и, не оглашая вслух вопросов, честно отвечает на все. Какое наименьшее количество записок нужно послать, чтобы наверняка узнать, где находится приз?

Ответ: 99.

Решение: Чтобы можно было однозначно определить, в какой из 100 коробок лежит приз, требуется возможность получить хотя бы 100 различных ответов на один набор вопросов. Так как ответы ведущего для различных положений приза могут отличаться только числом "да" среди них, то требуется возможность получить в ответ хотя бы 100 различных количеств "да". Значит, требуется хотя бы 99 вопросов (от 0 до 99 "да").

Пример на 99 вопросов. Пусть k-ый вопрос: «Номер коробки, в которой лежит приз, меньше либо равен k?». Тогда если ответов "да" ноль, то приз в сотой коробке, если один, то в 99-й и т.д.

Критерий: Только оценка – 3 балла, только пример – 3 балла. Только ответ – 0 баллов.