Версия от 18.02.2016

Решения заданий заключительного этапа Всесибирской открытой олимпиады школьников 2015-2016 г.г. по математике

Все задачи оцениваются из 7 баллов

7 класс

7.1. Доказать, что если $a+\frac{1}{a}$ – целое число, то и $a^2+\frac{1}{a^2}$ – целое число.

Решение: Понятно, что $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2$ — целое число, но $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=a^2+\frac{1}{a^2}+2$.

То есть, $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2=a^2+\frac{1}{a^2}$ – целое. Что и требовалось доказать.

7.2. Можно ли покрасить плоскость в 2016 цветов таким образом, что среди вершин любого треугольника найдётся хотя бы два цвета?

Решение: Докажем, что все точки одного цвета лежат на одной прямой. Так как прямых на плоскости больше 2016, то тем самым мы докажем, что этого сделать нельзя и обязательно найдётся треугольник с тремя вершинами одного цвета.

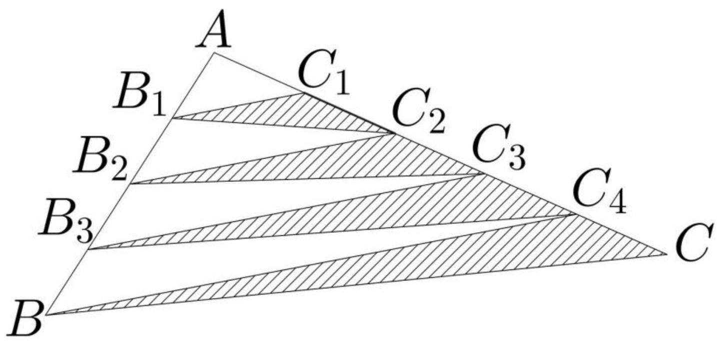
Пусть есть точки одного цвета, которые не лежат на одной прямой. Тогда таких точек хотя бы 3 (через 2 точки прямую можно провести всегда). Так как они не на одной прямой, то задают треугольник, с вершинами одного цвета. Вспомогательное утверждение доказано.

Критерии: доказательство только того, что всё лежит на прямых – 3 балла. Верная схема доказательства без обоснования того, что точки одного цвета лежат на одной прямой – 4 балла.

7.3. Дан треугольник ABC, сторона AB разбита на 4 равных отрезка $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B$, а сторона AC на 5 равных отрезков $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C$. Во сколько раз площадь треугольника ABC больше суммы площадей треугольников $C_1B_1C_2$, $C_2B_2C_3$, $C_3B_3C_4$, C_4BC?

Ответ: в 2 раза.

Решение: Обозначим площадь AB_1C_1 за S. Тогда площадь $B_1C_1C_2$ тоже S, так как B_1C_1 — медиана в AB_1C_2. Аналогично, площадь $B_1B_2C_2$ равна $2S$, т.к. C_2B_1 — медиана в AB_2C_2. Площадь $B_2C_2C_3$ равна половине площади AB_2C_2, так как у этих треугольников общая высота, а основание C_2C_3 в два раза меньше основания AC_2. Тогда площадь $B_2C_2C_3$ равна $2S$. Из аналогичных рассуждений получаем, что площадь $B_2C_3B_3$ равна половине площади AB_2C_3, то есть $3S$. C_3C_4 составляет треть от AC_3, поэтому площадь $B_3C_3C_4$ равна трети AB_3C_3 и равна $3S$. Аналогично, B_3C_4B и C_4BC



имеют площадь по *4S*. Тогда площадь всей закрашенной части равна $S + 2S + 3S + 4S = 10S$, а незакрашенной — $S + 2S + 3S + 4S = 10S$, т.е. закрашенная составляет половину от всего треугольника.

7.4. Маша и Миша вышли навстречу друг другу одновременно каждый из своего дома и встретились в одном километре от дома Маши. В другой раз они снова вышли каждый из своего дома навстречу друг другу одновременно, но Маша шла в 2 раза быстрее, и Миша в 2 раза медленнее, чем в прошлый раз. В этот раз они встретились в 1 километре от дома Миши. На каком расстоянии находятся дома Маши и Миши друг от друга?

Ответ: 3 км.

Решение: Докажем, что в первый и во второй раз они потратили одинаковое время. Пусть это не так, и во второй раз они потратили меньше времени. Тогда в первый раз Маша прошла 1 км, а во второй меньше двух километров (скорость в два раза больше, а время меньше). Миша прошел во второй раз 1 км, значит в первый раз он прошел больше двух (по аналогичным причинам). Значит, всё расстояние больше трёх километров (один от Маши и больше двух от Миши в первый раз), но одновременно меньше трёх километров (один от Миши и меньше двух от Маши во второй раз). Значит, это невозможно. Если во второй раз они шли дольше, то аналогичные рассуждения приведут к противоречию (в силу симметричности ситуаций).

Итак, они двигались одинаковое время оба раза. Значит, во второй раз Маша прошла 2 км, а Миша – 1. Следовательно, их дома находятся на расстоянии 3 километра.

Критерии: ответ, ответ с проверкой – 0 баллов, не доказано, что в первом и во втором случае время одинаковое, при использовании этого – не больше 2 баллов.

7.5. Дано число 1836549, можно брать две соседние ненулевые цифры и менять их местами, после чего вычесть из каждой из них по 1. Какое наименьшее число может получиться после этих операций?

Ответ: 1010101

Решение: Цифры в числе чередуются по четности: нечётное, чётное и т.д. Заметим, что при описанной операции чётное и нечётное числа меняются местами, а затем из них вычитается 1 и тем самым порядок чётности не нарушается. Таким образом, нельзя получить число меньше, чем 1010101 (в каждом разряде стоит наименьшая нечётная или чётная цифра, соответственно).

Покажем, как можно достичь этого результата (операцию проводим над подчеркнутыми цифрами, иногда над двумя парами одновременно):

$1\underline{83}65\underline{49} > 12\underline{7658}3 > 125\underline{67}43 > 12\underline{5654}3 > 12\underline{54}343 > 1\underline{23}4343 > 1\underline{21}4343 >$ 1014343

Далее каждую пару 43 превращаем в 23, затем в 21 и в 01, после этого получаем 1010101.

Критерии определения победителей и призеров
Всесибирской открытой олимпиады школьников по математике
(2015-2016 уч. год)

Согласно Положению победители и призеры олимпиады были определены по результатам Заключительного этапа Олимпиады. Общее количество победителей и призеров составило 380 человек из 1578 участников, что составляет 24,08 %. Количество победителей составило 85 человек, что составляет 5,38 %.

Основываясь на **общем рейтинге** участников и учитывая **наличие заметных разрывов** в баллах, набранных группами участников в верхней части рейтинга, жюри Олимпиады разработало следующие критерии определения победителей и призеров:
Максимальное возможное количество баллов – 35 баллов.

11 класс:

победители:
участники, набравшие более 77% от максимального количества баллов, т.е. от 27 до 35 баллов;
призеры:
2 степени – более 62 % от максимального количества баллов, т.е. от 22 до 26 баллов
3 степени – более 51 % от максимального количества баллов, т.е. от 18 до 21 баллов

10 класс:

победители:
участники, набравшие более 85 % от максимального количества баллов, т.е. от 30 до 35 баллов;
призеры:
2 степени – более 62 % от максимального количества баллов, т.е. от 22 до 29 баллов
3 степени – более 51 % от максимального количества баллов, т.е. от 18 до 21 баллов

9 класс:

победители:
участники, набравшие более 85 % от максимального количества баллов, т.е. от 30 до 35 баллов;
призеры:
2 степени – более 65 % от максимального количества баллов, т.е. от 24до 29 баллов
3 степени – более 51 % от максимального количества баллов, т.е. от 18 до 23 баллов

8 класс:

победители:
участники, набравшие более 82% от максимального количества баллов, т.е. от 29 до 35 баллов;
призеры:
2 степени – более 62 % от максимального количества баллов, т.е. от 22 до 28 баллов
3 степени – более 48 % от максимального количества баллов, т.е. от 17 до 21 баллов

7 класс:

победители:
участники, набравшие более 85 % от максимального количества баллов, т.е. от 30 до 35 баллов;
призеры:
2 степени – более 71 % от максимального количества баллов, т.е. от 24 до 29 баллов
3 степени – более 42 % от максимального количества баллов, т.е. от 15 до 21 баллов

Сопредседатель жюри по математике А.Ю.Авдюшенко