Всесибирская олимпиада школьников 2015-2016 г.г. по математике
Второй этап
10 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

10.1. Пусть неравенство $a\cos x + b\cos 2x \ge -1$ выполнено при всех значениях x. Докажите, что $a+b\le 2$.

Доказательство. Подставим в левую часть неравенства $x=\frac{2\pi}{3}$, тогда $\cos x = \cos 2x = -\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b\ge -1$, откуда $a+b\le 2$.

10.2. Найти число различных расстановок 8 ладей на различных белых полях шахматной доски 8 на 8 таких, что ни одна ладья не бьёт другую. Шахматная ладья бьёт все клетки горизонтали и вертикали, на пересечении которых стоит.

Ответ. $576=(4!)^2$.

Решение. Из того, что ни одна ладья не бьёт другую следует, что в каждой вертикали и в каждой горизонтали доски стоит ровно одна ладья. Заметим, что белые клетки вертикалей с нечётными номерами (первый тип) находятся в горизонталях с чётными номерами, а белые клетки вертикалей с чётными номерами (второй тип) находятся горизонталях с нечётными номерами, поэтому ладьи, стоящие на вертикалях с номерами разной чётности не могут бить друг друга. Следовательно, общее число искомых расстановок равно числу расстановок 4 ладей в клетках первого типа, равному 4!, умноженному на число расстановок 4 ладей в клетках второго типа, тоже равному 4!.

Критерии. Замечено, что ладьи, стоящие на вертикалях с номерами разной чётности не могут бить друг друга: 3 балла. Правильный подсчёт числа расстановок 4 ладей в клетках каждого типа: 2 балла. Их перемножение: 2 балла.

10.3. На доске написаны десять чисел (среди которых могут быть равные) таких, что среднее арифметическое любых трёх из этих чисел тоже написано на доске. Доказать, что все эти числа равны между собой.

Доказательство. Расположим числа в порядке возрастания: $a_1\le a_2\le\ldots\le a_{10}$. Предположим, что не все числа равны между собой, тогда $a_1<a_{10}$. Рассмотрим восемь средних арифметических $a_1<\frac{a_1+a_2+a_{10}}{3}\le\frac{a_1+a_3+a_{10}}{3}\le\ldots\le\frac{a_1+a_9+a_{10}}{3}<a_{10}$, среди них столько же различных, сколько среди чисел $a_2\le a_3\le\ldots\le a_9$, а из условия следует, что они содержатся среди $a_2\le a_3\le\ldots\le a_9$. Значит, они соответственно равны числам $a_2\le a_3\le\ldots\le a_9$, откуда сразу получаем, что $a_2=\ldots=a_9=\frac{a_1+a_{10}}{2}$, все числа, кроме крайних равны. Если $a_1<a_2$, то среднее арифметическое $a_1<\frac{a_1+a_2+a_3}{3}<a_2$ не может быть написано на доске — противоречие с условием. Аналогично в случае $a_9<a_{10}$. Следовательно, все эти числа равны между собой.

Критерии. Равенство между собой большей части чисел: 4 балла. Равенство всех: ещё 3 балла.

10.4. Две окружности внешним образом касаются друг друга в точке P. Прямая касается первой из них в точке A и пересекает вторую в точках B и C (B между A и C). Доказать, что AP является биссектрисой угла, смежного с углом BPC.

Доказательство. Продлим отрезок CP за вершину P до пересечения с первой окружностью в точке M и проведём через P общую касательную двух окружностей *l*. Угол MPA равен углу между касательной AB и хордой AM первой окружности, как вписанный угол, опирающийся на эту хорду. С другой стороны, как внешний угол треугольника MAC, он равен сумме углов AMP и ACP=BCP. В первой окружности угол AMP опирается на хорду AP, следовательно, равен углу между AP и общей касательной *l*, а во второй окружности угол BCP опирается на хорду BP и равен углу между BP и общей касательной *l*. Значит, сумма углов AMP и ACP=BCP, равная MPA, равна углу APB между хордами AP и PB, и AP является биссектрисой угла MPB, смежного с углом BPC.

Критерии. Угол MPA равен углу между касательной AB и хордой AM первой окружности: 1 балл. Угол MPA равен сумме углов AMP и ACP=BCP: ещё 2 балла. Угол AMP опирается на хорду AP, следовательно, равен углу между AP и общей касательной *l*, а во второй окружности угол BCP опирается на хорду BP и равен углу между BP и общей касательной l: ещё 2 балла. Сумма углов AMP и ACP=BCP, равная MPA, равна углу APB между хордами AP и PB, и AP является биссектрисой угла MPB: ещё 2 балла.

10.5. Можно ли найти четыре различных натуральных числа таких, что каждое из них делится на разность любых двух из трёх оставшихся чисел?

Ответ. Это невозможно.

Решение. Предположим, искомые четвёрки чисел существуют, выберем среди них четвёрку с наименьшей суммой. Сначала допустим, что одно из наших четырёх чисел нечётно. Среди трёх оставшихся выберем два одинаковой чётности, по условию, выбранное нечётное число должно делиться на их разность, являющуюся чётным числом, что невозможно. Следовательно, все эти числа чётны. Разделив каждое из них на 2, получим четвёрку, также удовлетворяющую условию задачи, но с вдвое меньшей суммой — противоречие с выбором начальной четвёрки.

Критерии. Рассмотрен случай, когда одно из наших четырёх чисел нечётно: 2 балла.