10 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

10.1. Из города в деревню вышел Викентий, а навстречу ему из деревни в город одновременно вышел Афанасий. Найти расстояние между деревней и городом, если известно, что расстояние между пешеходами равнялось 2 км дважды: сначала, когда Викентий прошёл половину пути до деревни, и потом, когда Афанасий прошёл треть пути до города.

Ответ. 6 км.

Решение. Обозначим расстояние между деревней и городом за S км, скорости Викентия и Афанасия за x и y, и посчитаем время, потраченное путниками в первом и втором случаях. Получим в первом случае: $\frac{S/2}{x}=\frac{S/2-2}{y}$, во втором $\frac{2S/3+2}{x}=\frac{S/3}{y}$. Отсюда, исключая x и y, имеем $S^2-2S-24=0$, откуда $S=6$ км.

Указания. Ответ с проверкой: 1 балл. Составление уравнений: 3 балла.

10.2. Можно ли представить число 199...99 (одна единица и 10 девяток) в виде суммы двух натуральных чисел, суммы цифр которых одинаковы?

Ответ. Нельзя.

Решение. Пусть можно представить число A=99...99 (всего 9 девяток) в виде суммы двух чисел B и C, суммы цифр которых одинаковы. Если при сложении цифр последних разрядов B и C происходит переход единицы в предыдущий разряд, то последняя цифра суммы не превосходит 8. Но в последнем разряде A стоит девятка, поэтому перехода единицы не происходит и сумма цифр последних разрядов B и C равна 9. Аналогично рассуждая слева направо для оставшихся разрядов, видим, что в каждом разряде B и C сумма цифр равна 9 и перехода единицы не происходит. При этом мы считаем, что в первом разряде одного из них стоит 0. Тогда сумма цифр B плюс сумма цифр C, равная удвоенной сумме цифр B, должна равняться сумме цифр A, то есть 91 — нечётному числу. Противоречие.

10.3. Через точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника провели прямые, соответственно параллельные биссектрисам противоположных углов. Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке.

Доказательство. Рассмотрим любой из треугольников, образованных вершиной исходного треугольника и двумя точками касания вписанной окружности со смежными этой вершине сторонами. Поскольку отрезки касательных из вершины к окружности равны, этот треугольник равнобедренный и его биссектриса перпендикулярна отрезку, соединяющему точки касания. Следовательно, прямая, параллельная этой биссектрисе, проходящая через третью точку касания, является высотой треугольника, образованного точками касания вписанной окружности со сторонами исходного треугольника. Утверждение задачи следует теперь из теоремы о том, что высоты треугольника пересекаются в одной точке

10.4. Можно ли расставить в вершинах куба различные целые числа так, чтобы число в каждой вершине равнялось сумме трёх чисел на концах рёбер, выходящих из этой вершины?

Ответ. Да, можно, например: в вершинах нижней грани по часовой стрелке 6,1,-3,2, в вершинах верхней грани над ними: 3,-2,-6,-1.

Решение. Обозначим вершины куба, как обычно, через $ABCDA_1B_1C_1D_1$, вершины A,C,B_1 и D_1 назовём чёрными, вершины B,D,A_1,C_1 — белыми. Один конец каждого ребра при этом белый, второй — чёрный, для каждой вершины все соседние имеют противоположный цвет. Каждое число равно сумме трёх соседних чисел противоположного цвета и каждое число один раз участвует в суммах для трёх соседних чисел противоположного цвета. Следовательно, сумма всех белых чисел равна утроенной сумме всех чёрных чисел и наоборот, откуда сумма всех чёрных чисел и сумма всех белых чисел равны нулю. Значит, число в вершине A равно сумме чисел в вершинах B,D и A_1, а она равны числу в вершине C_1 с обратным знаком. Таким образом, в концах каждой большой диагонали куба записаны противоположные числа. Следовательно, если задать три числа в вершинах B,D и A_1, они полностью определят все оставшиеся числа требуемым в задаче образом. Задав их как 1,2,3, получим один из ответов задачи.

Указания. Ответ можно подобрать и не прибегая к приведённым выше рассуждениям. Но он, в любом случае будет по структуре таким же. Просто за подбор ответа ставим те же 7 баллов. Любая попытка доказательства противного — 0 баллов.

10.5. Натуральные числа a,b,c,d таковы, что $a+c=1000, b+d=500$. Найти максимальное значение суммы $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$.

Ответ. $\frac{1}{499}+\frac{999}{1}$.

Решение. Ввиду симметрии можно считать, что $b \geq d$. Тогда при замене пары a,c на пару $a-1,c+1$ получим $(\frac{a-1}{b}+\frac{c+1}{d})-(\frac{a}{b}+\frac{c}{d})=\frac{1}{d}-\frac{1}{b}\geq 0$ - увеличение искомого выражения, следовательно, максимум нужно искать среди дробей $\frac{1}{b}+\frac{999}{d}$. При замене пары b,d на пару $b+1,d-1$ получим $(\frac{1}{b+1}+\frac{999}{d-1})-(\frac{1}{b}+\frac{999}{d})=\frac{999}{d(d-1)}-\frac{1}{b(b+1)}$. Ввиду того, что $b \geq d$, имеем $b(b+1)\geq d(d+1)>d(d-1)$, поэтому $\frac{999}{d(d-1)}>\frac{1}{d(d-1)}>\frac{1}{b(b+1)}$ и разность в предыдущем предложении положительна. Следовательно, максимум выражения достигается при $a=1, b=499, c=999, d=1$ и равен $\frac{1}{499}+\frac{999}{1}$.

Указания. Верный ответ с правильными a,b,c,d: 1 балл. Каждый из двух шагов в доказательстве: по 3 балла.