Всесибирская открытая олимпиада школьников 2015-2016 г.г. по математике

Заключительный этап

10 класс

28 февраля 2016г Время написания работы 4 астрономических часа Каждая задача оценивается в 7 баллов

10.1. Найти все натуральные числа n, такие, что $\frac{1}{n}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{pq}$ для некоторых простых p и q

Ответ. $n=1$.

Решение. Приведя выражение в условии к общему знаменателю, получим: $n(p+q+1)=pq$. Из простоты p и q следует, что делителями правой части могут быть только числа 1, p, q и pq, одно из которых и должно равняться $p+q+1$. Ввиду того, что 1, p и q меньше $p+q+1$, получаем $pq=p+q+1$ и $n=1$. Перепишем последнее равенство в виде $(p-1)(q-1)=2$, откуда $p=2,q=3$ или $p=3,q=2$.

Критерии оценивания. Угадано $n=1$ и $p=2,q=3$ или $p=3,q=2$: 1 балл. Доказано, что $n=1$- единственное число, которое может удовлетворять условию: 5 баллов. Показано, что оно удовлетворяет условию при $p=2,q=3$ или $p=3,q=2$: 2 балла. (Достаточно просто привести пример $p=2,q=3$ или $p=3,q=2$)

10.2. По координатной плоскости, стартуя в начале координат, прыгает кузнечик. Первый прыжок длины один сантиметр направлен вдоль оси OX, каждый следующий прыжок на 1 см длиннее предыдущего, и направлен перпендикулярно предыдущему в одну из двух сторон по его выбору. Сможет ли кузнечик после 31-ого прыжка оказаться в начале координат?

Ответ. Да.

Решение. Кузнечик совершит 16 горизонтальных прыжка нечётных длин 1, 3, 5,.., 31 см. Разобьём их на 4 четвёрки последовательных нечётных чисел, в каждой четвёрке первый и последний прыжки будут совершаться вправо, а второй и третий – влево. После каждых четырех таких прыжков кузнечик будет оказываться на оси OY. Вертикальных прыжков кузнечик совершит 15, разобьём их на тройку 2,4,6 первых и 3 последовательных четвёрок оставшихся от 8 до 30. Прыжки длин 2 и 4 он сделает вверх, а прыжок длины 6 – вниз. В каждой четвёрке первый и последний прыжки он сделает вверх, а второй и третий – вниз. Прыгая так, после первой тройки и после каждой четвёрки вертикальных прыжков он окажется на оси OX. В итоге, после всех 31 прыжка он вернётся в начало координат.

Критерии оценивания. Присутствует идея раздельной стратегии прыжков по горизонтали и вертикали: 1 балл. Есть идея разбиения прыжков на четвёрки, за которые он возвращается на исходное положение в данном направлении: 2 балла.

10.3. Две окружности пересекаются в точках P и M. На первой окружности выбрана произвольная точка A, отличная от P и M и лежащая внутри второй окружности, лучи PA и MA вторично пересекают вторую окружность в точках B и C соответственно. Доказать, что прямая, проходящая через A и центр первой окружности, перпендикулярна BC.

Доказательство. Пусть E — точка первой окружности, диаметрально противоположная A. Нам нужно доказать, что прямые AE и BC перпендикулярны. Точка E может лежать как вне второй окружности, так и внутри неё, либо может совпадать с P или M.

1. A лежит внутри второй окружности, E не совпадает с P или M. Обозначим точку пересечения BC и прямой AE за T. Тогда $\angle$CBP = $\angle$CMP, как вписанные во вторую окружность, опирающиеся на общую хорду PC , и $\angle$CMP = $\angle$AMP=$\angle$AEP, как вписанные в первую окружность, опирающиеся на общую хорду PA. Следовательно, четырёхугольник BTPE вписанный, поэтому $\angle$BTE=$\angle$BPE=$\angle$APE=90°.

2. A лежит внутри второй окружности, и E совпадает, скажем, с P, то четырёхугольник CBMP вписанный, поэтому $\angle$CBP=$\angle$CMP=$\angle$AMP=$\angle$AME=90° и прямые AE и BC перпендикулярны.

Критерии оценивания. Если пропущена возможность, когда E совпадает с P или M: снимаем 2 балла. Нерассмотрение одного из случаев, когда точка E лежит вне второй окружности, или внутри неё, не карается, так, как счёт углов в обоих случаях совершенно одинаковый.

10.4. Найти все функции $f(x)$, определённые на всей числовой прямой, удовлетворяющие уравнению $f(y-f(x))=1-x-y$ для произвольных x и y.

Ответ. $f(x)=\frac{1}{2}-x$.

Решение. 1) Положим сначала в условии $y=f(x)$, тогда $f(x)=1-x-f(0)$.

2) Подставим полученное выражение для $f(x)$ в условие, тогда: $f(y-f(x))=1-y+f(x)-f(0)=1-y+1-x-f(0)-f(0)=1-x-y$, откуда $f(0)=\frac{1}{2}$.

Следовательно, $f(x)=\frac{1}{2}-x$ -единственный кандидат в решения.

3) Проверка подстановкой: $f(y-f(x))=\frac{1}{2}-y+f(x)=\frac{1}{2}-y+\frac{1}{2}-x=1-x-y$ - условие задачи выполнено, следовательно, $f(x)=\frac{1}{2}-x$ является единственным решением задачи.

Критерии оценивания. Найдено только $f(0)=\frac{1}{2}$: 2 балла. Получено соотношение $f(x)=1-x-f(0)$: 3 балла. Отстутствие проверки: минус 1 балл.

10.5. Найдутся ли пять последовательных натуральных чисел таких, что если обозначить их буквами a,b,c,d,e в некотором порядке, то выполнится равенство $(a+b)(b+c)(c+d)(d+e)(e+a)=(a+c)(c+e)(e+b)(b+d)(d+a)$**?**

Ответ. Нет.

Решение. Предположим, такие числа нашлись, обозначим их за $x-2, x-1, x, x+1, x+2$ для некоторого натурального $x\geq 3$. Заметим, что десять чисел в скобках в обеих частях равенства в условии являются всевозможными попарными суммами чисел a,b,c,d,e, то есть попарными суммами чисел $x-2, x-1, x, x+1, x+2$. Из равенства в условии следует, что произведение всех этих десяти попарных сумм является точным квадратом натурального числа. Выразим это произведение через x: $(4x^2-9)(4x^2-4)(4x^2-1)^2 4x^2$, оно является квадратом тогда и только тогда, когда квадратом является $(4x^2-9)(4x^2-4)=16x^4-52x^2+36$. Однако последнее выражение не может быть квадратом, так как оно меньше $(4x^2-6)^2=16x^4-48x^2+36$, но больше $(4x^2-7)^2=16x^4-56x^2+49$, в силу того, что $4x^2\geq 36>13$

Критерии оценивания. Замечено, что десять чисел в скобках в обеих частях равенства в условии являются всевозможными попарными суммами чисел a,b,c,d,e: 1 балл. Замечено, что произведение всех этих десяти попарных сумм является точным квадратом натурального числа: 2 балла. Это произведение выражено через x, и замечено, что оно является квадратом тогда и только тогда, когда квадратом является $16x^4-52x^2+36$: 2 балла. Доказано, что $16x^4-52x^2+36$ не является квадратом: 2 балла.

Критерии определения победителей и призеров
Всесибирской открытой олимпиады школьников по математике
(2015-2016 уч. год)

Согласно Положению победители и призеры олимпиады были определены по результатам Заключительного этапа Олимпиады. Общее количество победителей и призеров составило 380 человек из 1578 участников, что составляет 24,08 %. Количество победителей составило 85 человек, что составляет 5,38 %.

Основываясь на **общем рейтинге** участников и учитывая **наличие заметных разрывов** в баллах, набранных группами участников в верхней части рейтинга, жюри Олимпиады разработало следующие критерии определения победителей и призеров:
Максимальное возможное количество баллов – 35 баллов.

11 класс:

победители:
участники, набравшие более 77% от максимального количества баллов, т.е. от 27 до 35 баллов;
призеры:
2 степени – более 62 % от максимального количества баллов, т.е. от 22 до 26 баллов
3 степени – более 51 % от максимального количества баллов, т.е. от 18 до 21 баллов

10 класс:

победители:
участники, набравшие более 85 % от максимального количества баллов, т.е. от 30 до 35 баллов;
призеры:
2 степени – более 62 % от максимального количества баллов, т.е. от 22 до 29 баллов
3 степени – более 51 % от максимального количества баллов, т.е. от 18 до 21 баллов

9 класс:

победители:
участники, набравшие более 85 % от максимального количества баллов, т.е. от 30 до 35 баллов;
призеры:
2 степени – более 65 % от максимального количества баллов, т.е. от 24до 29 баллов
3 степени – более 51 % от максимального количества баллов, т.е. от 18 до 23 баллов

8 класс:

победители:
участники, набравшие более 82% от максимального количества баллов, т.е. от 29 до 35 баллов;
призеры:
2 степени – более 62 % от максимального количества баллов, т.е. от 22 до 28 баллов
3 степени – более 48 % от максимального количества баллов, т.е. от 17 до 21 баллов

7 класс:

победители:
участники, набравшие более 85 % от максимального количества баллов, т.е. от 30 до 35 баллов;
призеры:
2 степени – более 71 % от максимального количества баллов, т.е. от 24 до 29 баллов
3 степени – более 42 % от максимального количества баллов, т.е. от 15 до 21 баллов

Сопредседатель жюри по математике А.Ю.Авдюшенко