Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2014-15 гг.

Заключительный этап **9 класс** **1 марта 2015 г.**

Время написания работы 4 астрономических часа *Каждая задача оценивается в 7 баллов*

9.1. В школе лодырей устроили соревнования по списыванию и подсказке. Известно, что 75% учеников школы вообще не явились на соревнования, а все остальные приняли участие хотя бы в одном из соревнований. При подведении итогов оказалось, что в обоих соревнованиях участвовало 10% всех явившихся и что участвовавших в соревновании по подсказке было в полтора раза больше, чем участвовавших в соревновании по списыванию. Найти наименьшее возможное число учеников в школе лодырей.

9.2. В параллелограмме $ABCD$ на стороне AD взята произвольная точка M и через M параллельно диагоналям проведены прямые, пересекающие стороны AB и CD соответственно в точках P и Q. Доказать, что площади треугольников MPB и MQC равны.

9.3. Окружность разбита на двадцать равных дуг двадцатью точками, являющимися вершинами правильного 20-ти угольника, каждая вершина окрашена в один из трёх цветов, все три цвета присутствуют. Доказать, что всегда можно выбрать по одной вершине каждого цвета так, что образованный этими вершинами треугольник содержит центр окружности. Центр может лежать внутри треугольника или на одной из его сторон.

9.4. На классном вечере каждый мальчик танцевал по крайней мере с половиной девочек, а каждая девочка – не более, чем с половиной мальчиков. Доказать, что как девочек, так и мальчиков на классном вечере было чётное число.

9.5. Найти все натуральные n такие, что при любом разбиении множества всех натуральных чисел от 1 до n включительно на два подмножества, в одном из подмножеств обязательно найдутся два различных числа, сумма которых является квадратом натурального числа.