

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2014-15 гг.

Заключительный этап

11 класс

1 марта 2015 г.

Время написания работы 4 астрономических часа. Каждая задача оценивается в 7 баллов

11.1. Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 40 км, в 4 часа утра вышел пешеход, а в 7-20 утра выехал велосипедист, который догнал пешехода точно посередине между А и В, после чего оба продолжили движение. Из В в А в 8-30 выехал второй велосипедист с той же скоростью, что и первый, который встретился с пешеходом спустя час после встречи пешехода с первым велосипедистом. Найти скорости пешехода и велосипедистов.

11.2. На сторонах AB и AC равностороннего треугольника ABC со стороной 10 взяты точки P и Q соответственно такие, что отрезок PQ касается вписанной в треугольник окружности и его длина равна 4. Найти площадь треугольника APQ .

11.3. Найдите множество, образуемое решениями систем уравнений $\begin{cases} ax+y=2a+3, \\ x-ay=a+4, \end{cases}$ при всевозможных значениях параметра a . (Для каждого значения a находится решение (x,y) данной системы и все эти решения вместе составляют искомое множество точек на координатной плоскости.)

11.4. Докажите, что в любой компании из 13 человек либо найдётся человек, знающий четырёх других, либо найдутся четверо, попарно не знакомых. Знакомства обоюдны — если А знает Б, то и Б знает А.

11.5. Найти все решения в натуральных числах уравнения: $2^x + 3^y = z^2$.