

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2014-15 гг.

Второй этап

15 декабря 2014 г. - 25 января 2015 г.

10 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

10.1. Площадь четырёхугольника, образованного серединами оснований и диагоналей трапеции, в четыре раза меньше, чем площадь самой трапеции. Найти отношение длин оснований трапеции.

10.2. Пусть x_1 - корень квадратного трёхчлена $y = x^2 + ax + b$, а x_2 - корень квадратного трёхчлена $y = x^2 - ax - b$, причём $x_1 \neq x_2$ и оба корня не равны нулю. Докажите, что между x_1 и x_2 обязательно лежит корень квадратного трёхчлена $y = x^2 + 2ax + 2b$.

10.3. Сумма всех восьми чисел a_1, a_2, \dots, a_8 равна $\frac{4}{3}$, а сумма любых семи из них положительна. Найти все значения, которые может принимать наименьшее из этих чисел.

10.4. Докажите, что в произвольном остроугольном треугольнике ABC существует точка M такая, что углы MAB , MBC и MCA равны.

10.5. Найдите все пары натуральных чисел a и b такие, что $\frac{a^2 + b}{b^2 - a}$ и $\frac{b^2 + a}{a^2 - b}$ - целые числа.