**Решения и критерии проверки заданий Второго (заочного) этапа**

**Всесибирской открытой олимпиады школьников по математике 2014-15 г.г.**

## 7 класс

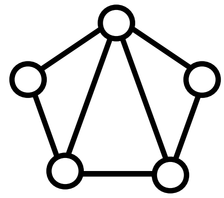
*Каждая задача оценивается в 7 баллов*

**7.1.** В булочной есть пирожки с двумя начинками (яблочной и вишнёвой) и двух видов (жареные и печёные). Докажите, что можно купить два пирожка, которые будут отличаться и начинкой, и по способу приготовления.

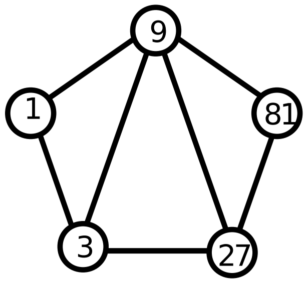
**Решение**: у нас есть всего 4 вида пирожков: жареный с вишней, жареный с яблоком, печёный с вишней, печёный с яблоком, которые разбиваются на две пары, отличающихся друг от друга обоими свойствами. Если у нас есть в продаже хотя бы три вида, то два точно противоположны, их и покупаем. Если в продаже 2 “непротивоположных” вида или всего один вид, то легко понять, что тогда нет пирожка с каким-то свойством, значит, такого быть не может.

**Критерии**: при решение перебором пропуск одного случая — не больше 5 баллов; пропуск большего числа случаев — не больше 3 баллов; рассмотрение одного случая — 0 баллов.

**7.2.** Аня нарисовала картинку: круги, некоторые из которых соединены между собой (см. рис.). Пришёл Гриша и расставил в кругах натуральные числа. Аня заметила, что отношение любых двух чисел, стоящих в соединенных кругах, равно либо 3, либо 9. А Гриша сказал, что отношение любых двух чисел, стоящих в несоединенных кругах, не равно ни 3, ни 9. Приведите пример такой расстановки.



**Решение:** например, так:




**Критерий:** возможны другие расстановки!

**7.3.** Разносторонний треугольник поделён на две части некоторой прямой. Докажите, что эти части не могут быть равными фигурами.

**Решение**: понятно, что имеет смысл рассматривать только случай, когда прямая делит треугольник на два других треугольника. Пусть треугольник $ABC$ делится отрезком $AD$ на два равных треугольника $ABD$ и $ADC$.

Если в этих треугольниках угол $B$ равен углу $C$, как соответствующие равные элементы, то треугольник $ABC$ равнобедренный — противоречие.

Если в этих треугольниках $\angle B = \angle DAC$, то $AD = DC$, то треугольник $ADC$ равнобедренный, следовательно, $\angle C = \angle DAC = \angle B$ — опять противоречие.

Если в этих треугольниках $\angle B = \angle ADC$, то $AD = AC$, то треугольник $ADC$ равнобедренный, следовательно, $\angle C = \angle DAC = \angle B$ — снова противоречие.

**Критерии**: доказано только то, что случай с 4-угольником лишний — 1 балл; сразу рассматриваются только треугольники, ничего не сказано про другие случаи — снять 1 балл; за каждый потерянный случай снимать 2 балла (например, если сразу утверждается, что если треугольники равны, то $B = C$, т.к. $AD$ — общая сторона).

**7.4.** Две девочки вяжут с постоянными, но разными скоростями. При этом первая девочка уходит пить чай каждые 5 минут, а вторая — каждые 7 минут. Если девочка ушла пить чай, то она потратит на это ровно 1 минуту. Когда девочки в очередной раз пошли пить чай вместе, оказалось, что связали они одинаково много. На сколько процентов производительность первой девочки выше, если начали вязать они одновременно?
**Решение**: производственный цикл у первой девочки (повязать + попить чай) составляет 6 минут, у второй — 8. Так как они вернулись с перерыва одновременно, то время работы до конца перерыва составило $6n = 8m$, т.е. $24k$ минут. Первая девочка работала □ времени, т.е. $20k$ минут. Вторая работала ⅞ времени, т.е. $21k$ минут. Связали они одинаково много, значит, производительность первой $1/20k$, второй $1/21k$. Следовательно, производительность первой больше на 5% ($1/20k : 1/21k \cdot 100\% = 21/20 \cdot 100\% = 105\%$).

**Критерий**: предполагается, что девочки вместе ходили пить чай конкретное число раз (например, один) — снять 1 балл; найдены производительности, но не найдены проценты — снять 1 балл.

**7.5.** В городе 9 остановок и несколько автобусов. Любые два автобуса имеют не более одной общей остановки. У каждого автобуса ровно три остановки. Какое максимальное число автобусов может быть в городе?
**Ответ:** 12.
**Решение:** если какая-то остановка общая для 5 маршрутов, то никакие два из них больше не имеют общих остановок, а значит остановок хотя бы $1+5\cdot 2=11$, что противоречит условию. Значит, каждая остановка — пересечение не более 4 маршрутов, тогда всего остановок автобусы делают не более $9\cdot 4$, а так как на каждом маршруте 3 автобуса, то всего автобусов не боле $9\cdot 4/3=12$.

Автобусы по городу могут ходить, например, так (остановки обозначены номерами):
(1, 2, 3), ( 4, 5, 6), (7, 8, 9),
(1, 4, 7), (2, 5, 8), (3, 6, 9),
(1, 5, 9), (2, 6, 7), (3, 4, 8),
(3, 5, 7), (2, 4, 9), (1, 6, 8).
**Критерий:** только пример — 3 балла; только оценка, что больше 12 быть не может — 3 балла; только замечание, что одна остановка не может быть больше чем в 4 маршрутах — 1 балл; только ответ — 0 баллов.

## 8 класс

*Каждая задача оценивается в 7 баллов*

**8.1.** Два горных козлика Геннадий и Николай устроили соревнование. Геннадий делает два прыжка по 6 метров за то же время, за которое Николай делает 3 прыжка по 4 метра. Козлики договорились скакать вдоль прямой, повернуть не раньше чем через 2 километра и вернуться обратно. Кто быстрее преодолеет этот путь?
**Ответ:** Николай.
**Решение:** оба козлика преодолевают 12 метров за одно и то же время, но один из них делает прыжки по 6, а другой по 4 метра. В одну сторону им нужно проскакать не менее 2000

метров, Николай может проскакать ровно 2000 метров, а Геннадий нет (2000 не делится на 6), значит, ему придется проскакать хотя бы 2004 метра в одну сторону. Так как скорости у козликов одинаковые, а путь Геннадия длиннее, то выиграет Николай.

**Критерий:** только ответ — 0 баллов.

**8.2.** В квадрате 3 на 3 расставьте девять подряд идущих целых чисел, так чтобы числа, стоящие в клетках, соседних по стороне и диагонали, не имели бы общих делителей, отличных от 1.

**Решение:** например, так:

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 9 | 10 |
| 5 | 7 | 11 |
| 6 | 13 | 12 |

**Критерии:** любая правильно заполненная таблица без объяснений — 7 баллов.

**8.3.** Аня нарисовала квадрат *ABCD*. Затем она построила равносторонний треугольник *ABM* так, что вершина *M* оказалась внутри квадрата. Диагональ *AC* пересекает треугольник в точке *K*. Докажите, что *CK* = *CM*.

**Решение:** найдём углы $\angle CKM$ и $\angle CMK$, если они окажутся равны, то треугольник равнобедренный.

$$\angle CKM = 180° - \angle BKC = 180° - (180° - \angle BCK - \angle CBK) =$$

$$= \angle BCK + \angle CBK = 45° + (90° - 60°) = 75°.$$

Так как *BM* = *BA* = *BC*, то есть треугольник *BCM* равнобедренный, то

$$\angle CMK = \angle CMB = \angle BCM = (180° - \angle CBM)/2 = (180° - (90° - 60°))/2 = 150°/2 = 75°.$$

Итак, $\angle CKM = \angle CMK$, значит, *CK* = *CM*.

**8.4.** Пусть $p$ — нечётное простое число. Докажите, что для некоторой пары различных натуральных чисел $m$ и $n$ имеет место равенство $2/p = 1/n + 1/m$, причем такая пара чисел единственна (с точностью до перестановки $n$ и $m$).

**Решение:** умножим уравнение на $2nmp$, получим $4nm = 2mp + 2np$. Перенесём всё в левую часть, прибавим к обеим частям $p^2$ и сгруппируем слагаемые в левой части, получим $(2n - p)(2m - p) = p^2$. Так как $n$ и $m$ различны, то $(2n - p)$ и $(2m - p)$ различны, и без ограничения общности $2n - p = 1$, $2m - p = p^2$. Выражаем отсюда $n = (1 + p)/2$, $m = p(p + 1)/2$, так как $p$ нечетное, то $p + 1$ делится на 2 и числа $m$ и $n$ будут целыми. Следовательно, $n$ и $m$ нашлись в явном виде, т.е. они существуют и единственны.

**Критерии:** разобраны только частные случаи — 0 баллов; не доказана единственность (просто подобраны $m$ и $n$) — максимум 3 балла.

**8.5.** В городе 9 остановок и несколько автобусов. Любые два автобуса имеют не более одной общей остановки. У каждого автобуса ровно три остановки. Какое максимальное число автобусов может быть в городе?

**Ответ:** 12.

**Решение:** если какая-то остановка общая для 5 маршрутов, то никакие два из них больше не имеют общих остановок, а значит остановок хотя бы $1+5\cdot 2=11$, что противоречит условию. Значит, каждая остановка — пересечение не более 4 маршрутов, тогда всего остановок автобусы делают не более $9\cdot 4$, а так как на каждом маршруте 3 автобуса, то всего автобусов не боле $9\cdot 4/3=12$.

Автобусы по городу могут ходить, например, так (остановки обозначены номерами):
(1, 2, 3), ( 4, 5, 6), (7, 8, 9),
(1, 4, 7), (2, 5, 8), (3, 6, 9),
(1, 5, 9), (2, 6, 7), (3, 4, 8),
(3, 5, 7), (2, 4, 9), (1, 6, 8).
**Критерий:** только пример — 3 балла; только оценка, что больше 12 быть не может — 3 балла; только замечание, что одна остановка не может быть больше чем в 4 маршрутах — 1 балл; только ответ — 0 баллов.

## 9 класс

*Каждая задача оценивается в 7 баллов*

**9.1.** Электронные часы на здании вокзала показывают часы и минуты текущего момента времени в формате ЧЧ:ММ от 00:00 до 23:59. Сколько времени в течение одних суток на часах будут гореть четыре различных цифры?
**Ответ.** 10 часов 44 минуты.
**Решение.** Каждая возможная комбинация четырёх цифр горит на часах одну минуту. Рассмотрим отдельно время суток от 00:00 до 19:59 и от 20:00 до 23:59. В первом случае допустимых по условию задачи комбинаций будет: 2 (цифра десятков часов на первой позиции), умножить на 5 (цифра десятков минут на третьей позиции, кроме той, что уже горит на первой позиции), умножить на 8 (цифра единиц часов, не равная цифрам на 1-ой и 3-ей позициях) и умножить на 7 (цифра единиц минут на четвёртой позиции, не равная цифрам на 1-ой, 2-ой и 3-ей позициях). Получается 560 комбинаций, горящих 560 минут, то есть 9 часов 20 минут в сутки.
Во втором случае допустимых по условию задачи комбинаций будет: 1 (цифра десятков часов на первой позиции, равная 2), умножить на 3 (цифра единиц часов на второй позиции, не равная 2), умножить на 4 (цифра десятков минут на третьей позиции, кроме тех, что уже горят на 1-ой и 2-ой позициях) и умножить на 7 (цифра единиц минут на четвёртой позиции, не равная цифрам на 1-ой, 2-ой и 3-ей позициях). Получается 84 комбинации, горящих 84 минуты, то есть 1 час 24 минуты в сутки. Вместе получаем 10 часов 44 минуты.
**Критерии оценивания.**
Идея разбиения рассмотрения на случаи время суток от 00:00 до 19:59 и от 20:00 до 23:59: 2 балла.
Идея подсчёта числа вариантов по цифрам в удобном порядке следования позиций: 3 балла.
Сам правильный подсчёт после этого: 2 балла.

**9.2.** Найти в произвольном треугольнике $ABC$ точку $M$ такую, что если построить на отрезках $MA$, $MB$ и $MC$, как на диаметрах, окружности, то длины их попарно общих хорд будут равны.
**Ответ.** Искомой будет точка пересечения биссектрис, она же — центр вписанной окружности треугольника.
**Решение.** Обозначим вторые точки пересечения окружностей, построенных на отрезках $MA$ и $MB$ через $P$ , на отрезках $MB$ и $MC$ — через $Q$, на отрезках $MC$ и $MA$ — через $R$. Поскольку углы $APM$ и $BPM$ , опирающиеся на диаметры $MA$ и $MB$ соответствующих окружностей, прямые, угол $APB$, равный их сумме, развёрнутый, поэтому $P$ лежит на стороне $AB$ и является основанием перпендикуляра из $M$ на $AB$. Аналогично, $Q$ — основание перпендикуляра из $M$ на $BC$, и $R$ - основание перпендикуляра из $M$ на $CA$. Следовательно, $M$ равноудалена от сторон треугольника и является центром его вписанной окружности.
**Критерии оценивания.** Только ответ с проверкой: 2 балла.
Доказательство того, что общая хорда является перпендикуляром к соответствующей стороне: 5 баллов.

**9.3.** В выпуклом четырёхугольнике точки *P,Q,R,S* являются серединами сторон *AB,BC,CD,DA* соответственно, а *K,L,M,N* - точки пересечения отрезков *AQ* и *DP, AQ* и *BR, CS* и *BR, CS* и *DP* соответственно. Докажите, что площадь четырёхугольника *KLMN* равна сумме площадей треугольников *AKP, BLQ, CMR* и *DNS.*

**Доказательство.** Заметим, что площадь треугольника *AQC* равна половине площади треугольника *ABC*, а площадь треугольника *ASC* равна половине площади треугольника *ADC,* следовательно, площадь четырехугольника *AQCS* половине площади четырёхугольника *ABCD*. Аналогично, сумма площадей треугольников *ADP* и *BCR* равна половине площади четырёхугольника *ABCD.* Выкидываем общие для четырехугольника *AQCS* и объединения треугольников *ADP и BCR* четырехугольники *AKNS* и *CML*Q, получим равенство площади четырёхугольника *KLMN* и суммы площадей треугольников *AKP, BLQ, CMR* и *DNS.*

**Критерии оценивания.** Замечание, что площадь треугольника *AQC* равна половине площади треугольника *ABC*, а площадь треугольника *ASC* равна половине площади треугольника *ADC*: 1 балл.

Доказательство того, что площадь четырехугольника *AQCS* половине площади четырёхугольника *ABCD*: 2 балла.

Доказательство того, что сумма площадей треугольников *ADP* и *BCR* равна половине площади четырёхугольника *ABCD*: 2 балла.

Выкидывание общих для четырехугольника *AQCS* и объединения треугольников *ADP и BCR* четырехугольников *AKNS* и *CML*Q: 2 балла.

**9.4.** Сумма всех восьми чисел $a_{1,} a_{2,} \ldots, a_8$ равна $\frac{4}{3}$, а сумма любых семи из них положительна. Найти все значения, которые может принимать наименьшее из этих чисел.

**Ответ.** $-8 < a_1 \le \frac{1}{6}$ **,** считая $a_1$ наименьшим.

**Решение.** Считаем, что $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_8$ и ищем область значений $a_1$. Ясно, что $a_1 \le \frac{1}{6}$, в противном случае сумма всех восьми чисел $a_1, a_2, \ldots, a_8$ была бы больше $\frac{1}{6} \cdot 8 = \frac{4}{3}$. Далее, ввиду того, что сумма $a_{1,} a_{2,} \ldots, a_7$ положительна, $a_8 < \frac{4}{3}$, значит, и остальные числа меньше $\frac{4}{3}$. Из положительности суммы $a_{1,} a_{2,} \ldots, a_7$ теперь следует, что $a_1 > -6 \cdot \frac{4}{3} = -8$. Следовательно, $-8 < a_1 \le \frac{1}{6}$. Осталось доказать, что $a_1$ может принимать любое значение $c$ из этого интервала. Положим $a_1 = c$, $a_2 = a_3 = \ldots = a_8 = \frac{4}{21} - \frac{c}{7}$. Нужно убедиться, что

1) $a_1 + \ldots + a_8 = c + 7 \cdot \left( \frac{4}{21} - \frac{c}{7} \right) = \frac{4}{3}$ - верно.

2) $a_1 = c \le \frac{4}{21} - \frac{c}{7} = \frac{4}{3} = a_2 = \ldots = a_8$ равносильно $c \le \frac{1}{6}$ - верно.

3) $a_1 + \ldots + a_7 = c + 6 \cdot \left( \frac{4}{21} - \frac{c}{7} \right) = \frac{c+8}{7} > 0$ - верно. Следовательно, сумма любых семи из этих чисел положительна.

**Критерии оценивания.** Оценка $a_1 \le \frac{1}{6}$ : 1 балл.

Оценка $a_8 < \frac{4}{3}$ и остальные числа меньше $\frac{4}{3}$ : 1 балл

Оценка $a_1 > -6 \cdot \frac{4}{3} = -8$ : 2 балла.

Построение примера для всех $a_1$ из найденного интервала с аккуратным доказательством : 3 балла (по баллу каждый пункт).

**9.5.** Найти все натуральные $n$ такие, что из палочек длин $1,2,\ldots,n$ (все числа от 1 до $n$ по одному разу) можно сложить равносторонний треугольник. При этом должны быть использованы все палочки.
**Ответ.** Все натуральные $n \geq 5$, остатки которых при делении на 6 равны 0,2,3 или 5.
**Решение.** Сумма длин всех палочек, равная $\frac{n(n+1)}{2}$, должна делиться на 3, поэтому произведение $n(n+1)$ должно делиться на 6, с учётом взаимной простоты сомножителей получаем, что один из них делится на 2, и один (возможно, тот же) — на 3. Перебрав четыре возможных варианта и заметив, что $n \leq 4$ нам не подходят, получаем $n$, указанные в ответе. Покажем, что для каждого из них требуемое в условии построение возможно. Заметим, что шесть произвольных последовательных чисел $k, k+1, k+2, k+3, k+4, k+5$ можно разбить на три пары чисел с одинаковой суммой: $\{k,k+5\},\{k+1,k+4\},\{k+2,k+3\}$. Следовательно, если мы покажем, как сложить правильный треугольник для $n=5,6,8,9$, то, добавляя необходимое количество последовательных шестёрок чисел к этим числам и соответствующее количество пар палочек к каждой стороне правильного треугольника, получим способ сложения правильного треугольника для всех указанных в ответе $n$.
При $n=5,6,8,9$ задача решается так: 1) $n=5, 1+4=2+3=5$, 2) $n=6, 1+6=2+5=3+4$, 3) $n=8, 1+2+3+6=4+8=5+7$, 4) $n=9, 1+2+3+4+5=6+9=7+8$.
**Критерии оценивания.** Из соображений делимости на 3 найдены искомые варианты для $n$ по модулю 6: 2 балла.
Доказательство $n \geq 5$ : 1 балл.
Построение примеров. Идея шестёрок: 3 балла. Примеры для $n=5,6,8,9$ : 1 балл.

## 10 класс

*Каждая задача оценивается в 7 баллов*

**10.1.** Площадь четырёхугольника, образованного серединами оснований и диагоналей трапеции, в четыре раза меньше, чем площадь самой трапеции. Найти отношение длин оснований трапеции.
**Ответ.** 3 : 1.
**Решение.** Обозначим вершины трапеции за *A,B,C,D*, середины оснований *AD* и *BC* за *K* и *M,* середины боковых сторон *AB* и *CD* за *P* и *Q* соответственно. Пусть длины *AD* и *BC* равны *a* и *b,* причём *a>b.* По теореме Фалеса, средняя линия *PQ* пересекает диагонали *AC* и *BD* в их серединах *L* и *N.* Тогда *LQ* и *NQ* являются средними линиями в треугольниках *ACD* и *BCD*, поэтому $LN=LQ-NQ=\frac{a}{2}-\frac{b}{2}=\frac{a-b}{2}$. Если высота трапеции равна *h,* то перпендикуляры из точек *K* и *M* на среднюю линию *PQ* равны $\frac{h}{2}$ и площадь четырёхугольника *KLMN*, образованного серединами оснований и диагоналей трапеции, равна $\frac{1}{2}\cdot h\cdot\frac{a-b}{2}=h\frac{(a-b)}{4}$. Площадь трапеции равна $h\frac{(a+b)}{2}$, откуда $\frac{a-b}{2(a+b)}=\frac{1}{4}$ и $a=3b$
**Критерии оценивания.** Доказательство того, что длина *LN* равна полуразности оснований: 2 балла.
Подсчёт площади четырёхугольника *KLMN*: 3 балла.
Завершение подсчёта: 2 балла.

**10.2.** Пусть $x_1$ - корень квадратного трёхчлена $y=x^2+ax+b$, а $x_2$ - корень квадратного трёхчлена $y=x^2-ax-b$, причём $x_1 \neq x_2$ и оба корня не равны нулю. Докажите, что между

$x_1$ и $x_2$ обязательно лежит корень квадратного трёхчлена $y=x^2+2ax+2b$ .
**Доказательство.** Обозначим $f(x)=x^2+ax+b$ , $g(x)=x^2-ax-b$ и $h(x)=x^2+2ax+2b$ . Тогда $h(x_1)=x_1^2+2ax_1+2b=ax_1+b=-x_1^2<0$ и $h(x_2)=x_2^2+2ax_2+2b=3ax_2+3b=3x_2^2>0$ . По теореме Больцано-Коши, непрерывная функция $h(x)=x^2+2ax+2b$ , принимающая на концах интервала $[x_1,x_2]$ значения разных знаков, обращается в ноль в некоторой внутренней точке этого интервала, являющейся, таким образом, корнем многочлена
**Критерии оценивания.** Доказательство того, что функция $h(x)=x^2+2ax+2b$ , принимает на концах интервала $[x_1,x_2]$ значения разных знаков: 4 балла.
Применение теоремы Больцано-Коши: 3 балла.

**10.3.** Сумма всех восьми чисел $a_1,a_2,\dots,a_8$ равна $\frac{4}{3}$ , а сумма любых семи из них положительна. Найти все значения, которые может принимать наименьшее из этих чисел.
**Ответ.** $-8<a_1\le\frac{1}{6}$

**Решение.** Считаем, что $a_1\le a_2\le\dots\le a_8$ и ищем область значений $a_1$ . Ясно, что $a_1\le\frac{1}{6}$ , в противном случае сумма всех восьми чисел $a_1,a_2,\dots,a_8$ была бы больше $\frac{1}{6}\cdot 8=\frac{4}{3}$ . Далее, ввиду того, что сумма $a_1,a_2,\dots,a_7$ положительна, $a_8<\frac{4}{3}$ , значит, и остальные числа меньше $\frac{4}{3}$ . Из положительности суммы $a_1,a_2,\dots,a_7$ теперь следует, что $a_1>-6\cdot\frac{4}{3}=-8$ . Следовательно, $-8<a_1\le\frac{1}{6}$ . Осталось доказать, что $a_1$ может принимать любое значение $c$ из этого интервала. Положим $a_1=c$ , $a_2=a_3=\dots=a_8=\frac{4}{21}-\frac{c}{7}$ . Нужно убедиться, что

1) $a_1+\dots+a_8=c+7\cdot\left(\frac{4}{21}-\frac{c}{7}\right)=\frac{4}{3}$ - верно.

2) $a_1=c\le\frac{4}{21}-\frac{c}{7}=\frac{4}{3}=a_2=\dots=a_8$ равносильно $c\le\frac{1}{6}$ - верно.

3) $a_1+\dots+a_7=c+6\cdot\left(\frac{4}{21}-\frac{c}{7}\right)=\frac{c+8}{7}>0$ - верно. Следовательно, сумма любых семи из этих чисел положительна:

**Критерии оценивания.** Оценка $a_1\le\frac{1}{6}$ : 1 балл.

Оценка $a_8<\frac{4}{3}$ и остальные числа меньше $\frac{4}{3}$ : 1 балл

Оценка $a_1>-6\cdot\frac{4}{3}=-8$ : 2 балла.

Построение примера для всех $a_1$ из найденного интервала с аккуратным доказательством доказательством: 3 балла (по баллу каждый пункт).

**10.4.** Докажите, что в произвольном остроугольном треугольнике *ABC* существует точка *M* такая, что углы *MAB*, *MBC* и *MCA* равны.
**Доказательство.** 1. Если обозначить углы *MAB*, *MBC* и *MCA* за $x$ , то углы *MBA*, *MCB* и *MAC* равны, соответственно, $B-x$ , $C-x$ и $A-x$ . Отсюда следует, что условие задачи эквивалентно тому, что углы *AMB*, *BMC* и С*MA* равны соответственно, *180-B,180-C* и *180-A*.
2. Заметим, что углы между продолжениями сторон треугольника *CB, AC, BA* и сторонами *BA, CB, CA* соответственно равны как раз *180-B,180-C* и *180-A.* По теореме о равенстве угла между касательной и хордой и угла, опирающегося на хорду, последнее равносильно тому,

что описанные окружности треугольников *AMB*, *BMC* и С*MA* касаются продолжений сторон треугольника *CB, AC* и *BA* соответственно.
3. Следовательно, если построить окружности, касающиеся продолжений сторон треугольника *CB, AC* и *BA* и проходящие через вершины *A,B* и *C* соответственно, то их общая точка, если она существует, будет искомой точкой *M* .
4. Окружности строятся так: центр окружности, проходящей через точки *A* и С и касающейся *BA* является пересечением перпендикуляра к *BA* в точке *A* и серединного перпендикуляра к *AC.* Остальные аналогично.
5. Считаем *ABC* самым большим углом треугольника. Обозначим за *M* точку пересечения окружностей, касающихся продолжений сторон треугольника *CB, AC* и проходящих через вершины *A,B.* Вторая окружность образует со стороной *BC* в точках *B* и *C* углы, равные *C*, поэтому её дуга между *B* и *C* полностью лежит внутри треугольника *ABC*. Первая окружность касается стороны *BC* в точке B, поэтому её дуга *BA* начинается внутри части треугольника *ABC*, ограниченной стороной *BC* и дугой *BC* второй окружности, а заканчивается вне этой части в вершине *A*. Следовательно, первая и вторая окружности пересекаются на деге *AB* второй окружности в точке *M* внутри треугольника. Тогда величина угла СМА равна 360 минус сумма величин углов *AMB* и *BMC,* то есть *360 — (180-B)-(180-C)=B+C=180-A.* Значит, точка *M* лежит и на третьей окружности и является искомой.
**Критерии оценивания.** Замечено, что условие задачи эквивалентно тому, что углы *AMB*, *BMC* и С*MA* равны соответственно, *180-B,180-C* и *180-A* : 2 балла.
Идея трёх нужных окружностей: 2 балла.
Построение окружностей: 1 балл.
Доказательство того, что общая точка трёх окружностей лежит внутри треугольника: 2 балла.

**10.5.** Найдите все пары натуральных чисел *a* и *b* такие, что $\frac{a^2+b}{b^2-a}$ и $\frac{b^2+a}{a^2-b}$ - целые числа.

**Ответ.** $(a,b)=(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)$

**Решение.** Не умаляя общности, считаем $b\geq a$ . Тогда $b^2\geq b\geq a$ , исключая случай $b^2=a,b=a=1$ , имеем $\frac{a^2+b}{b^2-a}>0$ , откуда $\frac{a^2+b}{b^2-a}\geq 1$ . Из последнего неравенства $b-a\leq 1$ , следовательно, в рассматриваемом нами случае либо $b=a$ , либо $b=a+1$ .

1) $b=a$ . Тогда $\frac{a^2+a}{a^2-a}=\frac{a+1}{a-1}=1+\frac{2}{a-1}$ -целое, значит, $a-1$ делит 2, откуда $a=2,3$ . Найденные пары $(a,b)=(2,2),(3,3)$ удовлетворяют и второму соотношению.

2) $b=a+1$ . Тогда $\frac{a^2+b}{b^2-a}=\frac{a^2+a+1}{a^2+a+1}=1$ - выполнено для всех $a$ . Подставляем $b=a+1$ во второе выражение, $\frac{b^2+a}{a^2-b}=\frac{a^2+3a+1}{a^2-a-1}=1+\frac{4a+2}{a^2-a-1}$ . Из последней дроби $4a+2\geq a^2-a-1$ , то есть $a^2-5a-3\leq 0$ , откуда, решая квадратное неравенство, $a\leq\frac{5+\sqrt{37}}{2}$ , то есть $a=1,2,3,4,5$ . Проверяем их подстановкой в выражение, получаем $a=1,2$ . Заметим, что при $a=1$ выражение отрицательно, что допускается условием.
При записи ответа нужно добавить симметричные пары решений, когда $b\leq a$ .
**Критерии оценивания.** Потеря симметричных решений: минус 1 балл.
Получение $b=a$ , либо $b=a+1$ : 2 балла.
Рассмотрение случая $b=a$ : 2 балла.
Рассмотрение случая $b=a+1$ : 3 балла.

## 11 класс

*Каждая задача оценивается в 7 баллов*

**11.1.** Найти все решения в натуральных числах уравнения: $x!+9=y^3$ **.**

**Ответ.** $x=6, y=9$

**Решение.** Если $x \geq 9$ то $x!$ делится на 27, $x!+9$ делится на 9 и не делится на 27. Тогда $y^3$ делится на 3, значит, $y$ делится на 3 и $y^3$ делится на 27 — противоречие. Следовательно, $x \leq 8$ . Перебор значений $x=1,2,3,\ldots,8$ даёт единственное решение $x=6, y=9$ .

**Критерии оценивания.** Только ответ с проверкой: 1 балл.

Использование делимости на 3 и оценка $x \leq 8$ : 5 баллов.

Проверка значений $x=1,2,3,\ldots,8$ : 2 балла.

**11.2.** Найти количество различных способов расстановки всех натуральных чисел от 1 до 9 включительно по одному в клетки таблицы размера 3 на 3 таких, что суммы чисел в каждой строке и каждом столбце равны. Таблицу нельзя поворачивать или отражать.

**Ответ.** 72 способа.

**Решение.** Среди чисел от 1 до 9 всего 5 нечётных, поскольку суммы во всех строках и столбцах, равные $\frac{1}{3}(1+2+\ldots+9)=15$ - нечётны, то в каждой строке и каждом столбце стоит нечётное количество нечётных чисел. Это возможно только, если в одной строке стоят три нечётных числа, а в остальных по одному, и в одном столбце стоят три нечётных числа, а в остальных по одному. Следовательно, все нечётные числа стоят в объединении некоторой строки и некоторого столбца. На пересечении этих строки и столбца записано число $15+15-(1+3+5+7+9)=5$ . Кроме того, 7 и 9 не могут стоять в одной строке или столбце. Следовательно, мы можем записать число 5 в некоторую клетку девятью различными способами, потом записать в одну из четырёх клеток того же, что и 5, столбца или строки число 9, а затем в две клетки тех же столбца и строки, не соседние с 9-ой, число 7. Получаем $9\cdot4\cdot2=72$ способа. Затем убеждаемся, что на пересечении столбца и строки, содержащих 7 и 9 может располагаться только 2: 6 и 8 не проходят по сумме, а 4 дала бы вместе с 7 ещё одну 4. После этого ясно, что остальные чётные числа можно расставить в оставшиеся клетки таблицы, причём единственным способом.

**Критерии оценивания.** Замечено, что все нечётные числа стоят в объединении некоторой строки и некоторого столбца: 2 балла.

Доказано, что на пересечении этих строки и столбца записано число 5: 1 балл.

Замечено, что 7 и 9 не могут стоять в одной строке или столбце: 1 балл.

Расположения остальных нечётных цифр 72-мя способами: 2 балла.

Отсутствие точного обоснования, что суммы в строках и столбцах равны 15: снимаем 1 балл.

Расстановки, различающиеся на поворот или отражение, считаются одинаковыми: снимаем 2 балла.

Потеря части решений: снимаем от 2 баллов и больше.

Построены все требуемые расстановки, но не доказано, что нет других: не выше 3 баллов.

**11.3.** Рассмотрим все графики квадратичных функций вида $y=x^2+px+q$ , пересекающие оси координат в трёх различных точках, и окружности, проходящие через эти три точки. Доказать, что все эти окружности проходят через одну общую точку.

**Доказательство.** Обозначим через $x_1$ и $x_2$ корни многочлена $x^2+px+q$ , по условию они различны и не равны нулю. По теореме Виета, их произведение равно $q$ , оно положительно, если $x_1$ и $x_2$ одного знака, и отрицательно — если разных. Рассмотрим отрезок, соединяющий корни, как хорду в окружности, проходящей через три точки пересечения графика данного трёхчлена с координатными осями, сам или продолжение которого проходит через точку O — начало координат. Третий раз график трёхчлена пересекает координатную ось $OY$ в точке $Q(0,q)$ , по теореме о касательной и секущей, окружность должна пересекать ось $OY$ в точке $S(0,s)$ , возможно, совпадающей с $Q$, такой, что $|qs|=|x_1 x_2|=|q|$ , откуда модуль $s$ равен 1. Следовательно, если $x_1$ и $x_2$ одного знака, они расположены по одну сторону от *O,* также Q и S расположены по одну сторону от *O,* при этом $q$ положительно, следовательно, $s$ положительно и $s=1$ . Если же $x_1$ и $x_2$ разных знаков, они расположены по разные стороны от *O,* также Q и S расположены по разные стороны от *O,* при этом $q$ отрицательно, а $s$ - положительно, следовательно, снова $s=1$ .

**Критерии оценивания.** Если нет полного разбора знака $s$ в разных случаях: снимаем 2 балла.

**11.4.** Длины сторон пятиугольника *ABCDE* равны 1. Пусть точки *P,Q,R,S* являются серединами сторон *AB,BC,CD,DE* соответственно, а точки *K* и *L* являются серединами отрезков *PR* и *QS* соответственно. Найти длину отрезка *K L*.

**Ответ.** $\frac{1}{4}$

**Решение 1.** Под *XY* в данном решении будем понимать вектор с началом в точке *X* и концом в точке *Y.* Тогда $AK=\frac{1}{2}(AP+AR)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}AB+AB+BC+\frac{1}{2}CD\right)=\frac{3}{4}AB+\frac{1}{2}BC+\frac{1}{4}CD$ . Аналогично, $AL=\frac{1}{2}(AQ+AS)=\frac{1}{2}\left(AB+\frac{1}{2}BC+AB+BC+CD+\frac{1}{2}DE\right)=AB+\frac{3}{4}BC+\frac{1}{2}CD+\frac{1}{4}DE$ . Тогда $KL=AL-AK=\frac{1}{4}(AB+BC+CD+DE)=\frac{1}{4}AE$ . Следовательно, отрезок *KL* параллелен отрезку *AE* и длина его равна $\frac{1}{4}$ длины *AE.*

**Решение 2.** Отметим точку *M* , являющуюся серединой диагонали *BE*. Тогда точки *Q,R,S* и *M* являются серединами сторон четырёхугольника *BCDE* и, по хорошо известному факту являются вершинами параллелограмма (Вариньона для *BCDE*) . Точка *L* является серединой его диагонали *QS,* значит, и серединой его диагонали *RM.* Следовательно, отрезок *KL* – средняя линия в треугольнике *PRM.* С другой стороны, отрезок *RM* — средняя линия в треугольнике *ABE.* Поэтому, длина *KL* равна половине длины *RM,* и четверти длины *AE.* Заметим, что ни выпуклость пятиугольника, ни длины остальных его сторон здесь практически ни при чём.

**Критерии оценивания.** Есть идея параллелограмма *QRSM:* 3 балла.
Замечено, что отрезок *KL* – средняя линия в треугольнике *PRM: 3* балла.
Замечено, что отрезок *RM* — средняя линия в треугольнике *ABE:* 1 балл.

**11.5.** Докажите, что для произвольных вещественных чисел *a,b,c,d,e* выполняется неравенство $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\geq a(b+c+d+e)$ .

**Доказательство.** Перепишем исходное неравенство в виде: $a^2-a(b+c+d+e)+b^2+c^2+d^2+e^2\geq 0$ и будем рассматривать его как квадратичный трёхчлен относительно $a$ с остальными переменными в качестве параметров, который должен быть неотрицательным при всех значениях $a$ . Последнее равносильно неположительности дискриминанта $D=(b+c+d+e)^2-4(b^2+c^2+d^2+e^2)$ данного трёхчлена. Последнее выполнено в силу неравенства о среднем квадратичном и средним арифметическом чисел *b,c,d,e* . Если не привлекать к делу неравенство о среднем квадратичном и средним арифметическом, то дискриминант можно переписать в виде: $D=2(bc+bd+be+cd+ce+de)-3(b^2+c^2+d^2+e^2)$ . Запишем для каждой *x,y* пары различных букв из *b,c,d,e* очевидное неравенство $2xy-(x^2+y^2)\leq 0$ и сложив шесть полученных неравенств, получим неравенство $D\leq 0$ .

**Критерии оценивания.** Есть идея положительности дискриминанта квадратного уравнения: 2 балла.