Решения заданий заключительного этапа Всесибирской открытой олимпиады школьников по математике 2014-15 гг.

Каждая задача оценивается в 7 баллов

7 класс

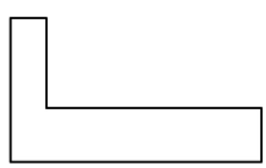
Каждая задача оценивается в 7 баллов

7.1. Составьте три несократимые (не обязательно правильные) дроби, произведение которых равно 1, используя в качестве числителей и знаменателей шесть чисел из набора {1,2,3,4,5,6,7,8,9}. (Каждое число можно использовать один раз или не использовать вовсе).
Ответ: например, 3/8, 4/9, 6/1 или 3/4 , 6/1, 2/9.
Путь к решению: Очевидно, 5 и 7 использовать нельзя, так как их будет не с чем сократить, остальные числа состоят из двоек и троек в своем разложении, распределяя их, строим пример.
Критерий: Любой правильный набор дробей – 7 баллов. Понято, что нельзя использовать 5 и 7, но не построен пример – 1 балл.

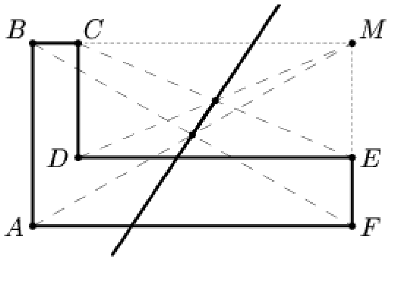
7.2. Оля, Олег, Поля и Паша участвовали в соревновании и заняли первый 4 места, после соревнования Поля сразу же ушла, а остальные сделали по 2 заявления, причем правду сказал только один ребенок, а остальные оба раза соврали. Каждый сказал, что первое место занял он. Кроме этого, Оля сказала, что все нечетные места заняли мальчики; Олег, что они с Олей заняли два соседних места; Паша, что все нечетные места заняли люди, чьи имена начинаются на О. Определите, кто какое место занял.
Ответ: Олег – I, Оля – II, Поля – III, Паша - IV
Решение: Оля и Паша соврали, т.к. каждый из них сделал два противоречивых заявления (поставил на первое место одновременно себя и кого-то ещё). Значит, правду сказал Олег, он занял первое место, а Оля – вторoe. Оля соврала, когда сказала, что на первом и третьем местах мальчики, значит, на третьем месте девочка, то есть Поля, а на четвёртом Паша.
Критерий: Правильный ответ без обоснований, ответ с проверкой – 1 балл.

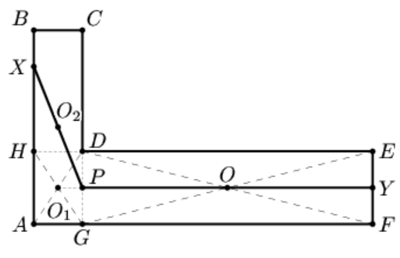
7.3. Известно, что у всех кракозябр есть рога или крылья (возможно, и то, и то). По результатам всемирной переписи кракозябр, выяснилось, что у 20% кракозябр, имеющих рога, есть ещё и крылья, а 25% кракозябр, у которых есть крылья, имеют ещё и рога. Сколько кракозябр осталось в мире, если известно, что их больше 25, но меньше 35?
Ответ: 32.
Решение: Обозначим за n – число кракозябр и с крыльями, и с рогами. Тогда рогатых – $5n$, а крылатых – $4n$. Из формулы включения-исключения всего кракозябр $5n+4n-n=8n$. От 25 до 35 есть всего одно целое число, делящееся на 8.
Критерий: Ответ, ответ с проверкой – 1 балл.

7.4. Дана следующая фигура (см. рисунок, все углы прямые). С помощью линейки без делений разделите его на два многоугольника равной площади.

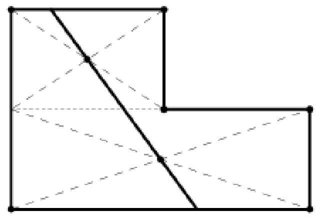


Ответ:





Решение: если в прямоугольнике провести прямую через пересечение диагоналей, то она разделит прямоугольник на две равновеликие части, в силу центральной симметрии. На этой идее основываются различные решения этой задачи. Например, можно разделить фигуру на два прямоугольника и провести разрезы по прямым, проходящим через их центры симметрии, так чтобы прямые пересекались на границе прямоугольников (второй рисунок). Или можно рассматривать исходную фигуру как разность двух прямоугольников (первый рисунок). В этом случае, искомой будет прямая, которая проходит через центры симметрии обоих прямоугольников.



Кроме того, существуют разрезания, которые работают не всегда. Пример приведен справа. Такое разрезание разбивает исходную фигуру на три части, при неудачном соотношении сторон.

Критерий: Приведён пример разрезания без какого-либо обоснования – максимум 4 балла, причём если разрезание работает для любых соотношений сторон многоугольника, то ставить 4 балла, если нет – 1 балл. Правильное обоснование оценивать максимум в три балла, баллы складываются с баллами за пример.

7.5. Вася выписал на доске все натуральные числа от 1 до 2014, после чего Петя стёр 1006 из них. Докажите, что среди оставшихся чисел найдутся два таких, что одно будет делителем другого.

Решение: Рассмотрим наибольшие нечётные делители оставшихся чисел. У чисел от 1 до 2014 есть ровно 1007 различных наибольших нечётных делителей (числа 1, 3, ..., 2013). А у нас осталось 1008 чисел, следовательно, из принципа Дирихле, два из оставшихся чисел имеют одинаковые наибольшие нечётные делители. Это означает, что два выбранных числа отличаются только тем, что множитель 2 входит в них в разных степенях. Большее из них делится на меньшее.

Критерии: не показано строго, что числа отличаются только степенью входящей в разложение двойки -- снять 1 балл; разбиение на непересекающиеся группы по наибольшим нечетным делителям без дальнейших продвижений – 2 балла.

8 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

8.1. Оля, Олег и Паша заняли первые три места в соревновании. Каждый из них сказал, что занял первое место. Оля, кроме этого, сказала, что все нечетные места заняли мальчики, а Олег, что Оля не права. Известно, что дети либо всегда врут, либо всегда говорят правду. Кто какое место занял?

Ответ: I – Олег, II – Паша, III – Оля.

Решение: Оля не могла сказать правду, потому что согласно её высказыванию она заняла I место, которое мог занять только мальчик. Значит, она не первая. Кроме того, если она заняла II место, то второе её высказывание правда, что недопустимо. Итак, Оля третья. Высказывание Олега про Олю верно, а значит, он говорит правду и занял I место. Паша занял оставшееся II место.

Критерий: только ответ, ответ с проверкой – 1 балл; доказано только что Оля на III месте – 2 балла. Эти баллы суммируются!

8.2. Запишите в строку 20 чисел так, чтобы сумма любых трёх чисел, записанных подряд, была положительна, а сумма всех 20 чисел была отрицательна.

Ответ: например, -3; -3; 6,5; -3; -3; 6,5; -3; -3; 6,5; -3; -3; 6,5; -3; -3; 6,5; -3; -3; 6,5; -3; -3.

Путь к решению: можно предположить, что последовательность будет периодическая

$$a, a, b, a, a, b, a, a, b, a, a, b, a, a, b, a, a, b, a, a.$$

Отсюда получается, что $2a + b > 0$ и $14a + 6b < 0$. Такие a и b подобрать уже несложно.

Критерий: только пример, без проверки – 7 баллов; идея решения (такая как описана или иная) без примера и без описания того, как построить пример – 2 балла; идея решения с доказательством, что a и b (или какие-то другие величины, если идея другая) найдутся – 7 баллов.

8.3. Какое максимальное число ладей можно расположить на шахматной доске 8 на 8 так, чтобы каждая ладья била не более чем одну другую? Ладья бьет все клетки вертикали и горизонтали, на которых стоит.

Ответ: 10.

Решение: Ясно, что в каждом столбце и строке не более двух ладей. Пусть k ладей расположены с соблюдением условия. На каждом поле, где стоит ладья, напишем число 0. В каждом из 8 столбцов проделаем следующую операцию: если в столбце стоят два числа, то прибавим к обоим по 1, если одно число, то к нему прибавим 2 (в пустом столбце ничего писать не будем). Затем проделаем точно такую же операцию с каждой строкой. Ясно, что на месте каждой из k ладей в результате будет написано либо 3, либо 4 (если написано 2, то эта ладья под боем двух других), поэтому сумма S всех написанных чисел не меньше $3k$. С другой стороны, поскольку в каждый из 8 столбцов и затем в каждую из 8 строк мы добавили не более чем 2, то $S \le 32$. Итак, $3k \le S \le 32$, откуда $k \le 10$. Пример легко строится.

л	л						
		л					
		л					
			л	л			
					л		
					л		
						л	л

Критерий: Только ответ – 0 баллов. Пример оценивается в 2 балла, оценка на число ладей – в 5 баллов (баллы складываются).

8.4. На сторонах треугольника AB, BC и AC треугольника ABC произвольным образом выбраны соответственно точки C_1, A_1, B_1. Пусть K_1, K_2, K_3 - середины AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что эти точки не могут лежать на одной прямой

Решение: Предположим противное. Сначала докажем, что точки K_1, K_2, K_3 лежат на средних линиях треугольника (первая часть доказательства). Если это так, то K_1, K_2, K_3 лежат, во-первых, на разных сторонах треугольника, а во-вторых, на одной прямой. Значит, существует прямая пересекающая все стороны треугольника, что невозможно (вторая часть доказательства).

Первая часть доказательства. Докажем, что в треугольнике ABC середина чевианы AA_1 лежит на средней линии. Обозначим середину чевианы M, середины сторон AC и AB – B_2 и C_2, соответственно. Тогда в треугольнике ABA_1 отрезок MC_2 – средняя линяя, параллельная BC. Средняя линяя B_2C_2 треугольника ABC параллельная BC. Таким образом, MC_2 и B_2C_2 проходят через одну точку, лежат в одной полуплоскости и параллельны одной стороне, значит, M лежит на средней линии B_2C_2.

Вторая часть доказательства. Любая прямая разделяет пространство на две части, по принципу Дирихле найдутся две вершины, лежащие в одной полуплоскости. Сторона, соединяющая эти две вершины, не пересекает исходную прямую.

Критерии: отсутствует вторая часть доказательства, но отмечен этот факт – баллы не снимать. Первая часть без выводов и дальнейших продвижений оценивается из 5 баллов. Не доказана, но используется, первая часть – ставить не больше 3 баллов.

8.5. В некотором итальянском городе ведут свои тёмные делишки 20 мафиозных кланов, причём известно, что каждый клан враждует хотя бы с 14-ю другими. Всегда ли найдутся 4 клана, попарно враждующих друг с другом?

Ответ: да, всегда.

Решение: соберем все кланы в одной комнате. Выберем один из них, обозначим его 1,

оставим в комнате только этот клан и кланы, враждующие с ним, значит, из комнаты ушло не более 5 кланов. Выберем новый клан, обозначим его 2, оставим в комнате только его и его врагов, снова уйти может не более 5 кланов, причем 1 останется, так как он уже враждует со всеми в комнате. Выберем следующий клан, обозначим его 3, удалим из комнаты всех, кроме него и враждующих с ним, снова удалилось не более 5 кланов, причем 1 и 2 останутся, так как в комнате только их враги. Всего удалилось не более 15 кланов. Из оставшихся не менее 5 кланов 1, 2 и 3 враждуют между собой и с любым из оставшихся, то есть образуют искомую четверку.
Критерий: Разбор частных случаев – 0 баллов.

9 класс

9.1. В школе лодырей устроили соревнования по списыванию и подсказке. Известно, что 75% учеников школы вообще не явились на соревнования, а все остальные приняли участие хотя бы в одном из соревнований. При подведении итогов оказалось, что в обоих соревнованиях участвовало 10% всех явившихся и что участвовавших в соревновании по подсказке было в полтора раза больше, чем участвовавших в соревновании по списыванию. Найти наименьшее возможное число учеников в школе лодырей.
Ответ. 200**.**
Решение. Обозначим количество учащихся в нашей школе за n человек. На соревнования явились $\frac{n}{4}$ человек. С учётом $\frac{n}{40}$ человек, принявших участие в обоих соревнованиях, в соревновании по подсказке было $\frac{3}{5}(\frac{n}{4}+\frac{n}{40})=\frac{33n}{200}$ участников. Чтобы это число было целым, ввиду взаимной простоты чисел 33 и 200 нужно, чтобы n делилось на 200. В соревновании по списыванию участвовало всего $\frac{2}{5}(\frac{n}{4}+\frac{n}{40})=\frac{11n}{100}$ человек, и достаточно, чтобы n делилось на 100. С учётом всего, необходимо и достаточно, чтобы n делилось на 200, в частности, было не меньше 200.
Пример: 200 учащихся: в соревнованиях участвовали 50 человек, в соревновании по подсказке 33 человека, а по списыванию – 22 человека, в обоих – 5 человек.
Критерий. Ответ с проверкой 2 балла.
Правильные формулы: 3 балла.
Правильные выводы о делимости n на 200: 2 балла.
Отсутствие примера на 200: минус 1 балл.

9.2. В параллелограмме $ABCD$ на стороне AD взята произвольная точка M и через M проведены прямые параллельно диагоналям, пересекающие стороны AB и CD соответственно в точках P и Q. Доказать, что площади треугольников MPB и MQC равны.
Доказательство. Обозначим длины отрезков AM и AD за a и d и соответственно, а расстояние между параллельными прямыми AB и CD за h, тогда $PB=\frac{d}{a+d}AB, QC=\frac{a}{a+d}CD=\frac{a}{a+d}AB$, а высоты из вершины M в треугольниках MPB и MQC равны $h_1=\frac{a}{a+d}h, h_2=\frac{d}{a+d}h$. Отсюда $S_{MPB}=\frac{1}{2}h_1PB=\frac{1}{2}\frac{ad}{(a+d)^2}h\cdot AB=\frac{1}{2}h_2QC=S_{MQC}$.
Критерий. Идея использования теоремы Фалеса: 2 балла.
9.3. Окружность разбита на двадцать равных дуг двадцатью точками, являющимися вершинами правильного 20-ти угольника, каждая вершина окрашена в один из трёх цветов,

все три цвета присутствуют. Доказать, что всегда можно выбрать по одной вершине каждого цвета так, что образованный этими вершинами треугольник содержит центр окружности. Центр может лежать внутри треугольника или на одной из его сторон.

Доказательство. Если есть пара противоположных вершин (симметричных относительно центра окружности), окрашенных в разные цвета, то, взяв любую вершину третьего цвета, получим искомый в условии треугольник. Пусть далее все пары противоположных вершин окрашены в одинаковые цвета. Все цвета присутствуют, поэтому можно выбрать пару противоположных вершин A и B, окрашенных в первый цвет и другую пару противоположных вершин C и D, окрашенных во второй цвет, пусть вершины идут в порядке A,C,B, D по часовой стрелке. Цвета 1 и 2 при этом чередуются, поэтому, если вершина P третьего цвета лежит на одной из дуг AC,CB,BD и DA, то легко заметить, что в качестве искомого треугольника можно взять соответственно, PBD,PDA,PAC и PCB.

Критерий. Первый случай, когда есть пара противоположных вершин, окрашенных в разные цвета: 2 балла.

9.4. На классном вечере каждый мальчик танцевал по крайней мере с половиной девочек, а каждая девочка – не более, чем с половиной мальчиков. Доказать, что как девочек, так и мальчиков на классном вечере было четное число.

Доказательство. Обозначим общее число мальчиков и девочек на вечере через k и l соответственно, количества девочек, с которыми танцевали мальчики за $d_1 \geq \frac{l}{2}, d_2 \geq \frac{l}{2}, \dots, d_k \geq \frac{l}{2}$, количества мальчиков, с которыми танцевали девочки, за $m_1 \leq \frac{k}{2}, m_2 \leq \frac{k}{2}, \dots, m_l \leq \frac{k}{2}$. Сумма $d_1 + d_2 + \dots + d_k$ равна общему числу пар во всех танцах вечера и не меньше $\frac{kl}{2}$, причём равенство возможно, только если все неравенства $d_1 \geq \frac{l}{2}, d_2 \geq \frac{l}{2}, \dots, d_k \geq \frac{l}{2}$ являются равенствами. Аналогично, сумма $m_1 + m_2 + \dots + m_k$ тоже равна общему числу пар во всех танцах вечера и не больше $\frac{kl}{2}$, причём равенство возможно, только если все неравенства $m_1 \leq \frac{k}{2}, m_2 \leq \frac{k}{2}, \dots, m_l \leq \frac{k}{2}$ являются равенствами. Поскольку количество пар во всех танцах не зависит от способа подсчёта, оно равно $m_1 + m_2 + \dots + m_k$ и равно $d_1 + d_2 + \dots + d_k$, и все неравенства являются равенствами. Отсюда сразу следует, что $\frac{l}{2} = d_1 = d_2 = \dots d_k$ и $\frac{k}{2} = m_1 = m_2 = \dots m_l$ - целые числа, значит, k и l - чётные.

Критерий. Выписаны неравенства: 2 балла. Точность каждого неравенства: 3 балла.

9.5. Найти все натуральные n такие, что при любом разбиении множества всех натуральных чисел от 1 до n включительно на два подмножества, в одном из подмножеств обязательно найдутся два различных числа, сумма которых является квадратом натурального числа.

Ответ. $n \geq 15$.

Решение. Придадим процессу наукообразие. Построим граф, вершинами которого будут числа от 1 до n, и вершины a и b соединены ребром тогда и только тогда, когда сумма этих чисел является квадратом натурального числа. Для произвольного разбиения чисел от 1 до n на два подмножества будем красить числа одного из них в белый цвет, а другого — в чёрный. Если граф не содержит циклов нечётной длины, то, окрашивая вершины его «через одну» в чёрный и белый цвета, мы получим разбиение множества числа от 1 до n на подмножества чёрных и белых чисел, в которых нет пар чисел, дающих в сумме квадрат. В противном случае, при любой раскраске вершин цикла нечётной длины в два цвета, будут две соседние вершины одного цвета, соответствующие числа будут лежать в одном подмножестве разбиения и давать в сумме квадрат.

Будем называть *хорошими* разбиения, в которых нет пар чисел одного цвета, дающих в сумме квадрат. Ясно, что хорошее разбиение чисел от 1 до n сразу даёт хорошее разбиение для чисел от 1 до m при всех $m < n$, и наоборот, если хорошее разбиение чисел от 1 до n невозможно, то невозможно и хорошее разбиение чисел от 1 до m при всех $m > n$.

При $n = 15$ несложно заметить цикл нечётной длины 1-3-6-10-15-1, следовательно, при $n \ge 15$ хорошее разбиение чисел от 1 до n невозможно.

Пусть $n = 14$, убедимся, что в графе вообще нет циклов и построим хорошее разбиение всех чисел от 1 до 14. Допустимыми квадратами при $n = 14$ могут быть только 4=1+3, 9=1+8=2+7=3+6=4+5,16=2+14=3+13=4+12=5+11=6+10=7+9 и 25=11+14=12+13. Заметим, что числа 1, 2, 4,5,6,7,11,12,13 встречаются в суммах по 2 раза, числа 8,9,10,14-по одному, число 3 — трижды, а всего сумм 13.

Начнём красить числа по правилу — два числа в одной сумме красятся в противоположный цвет. Возьмём число, встречающееся в суммах один раз, скажем, 8, оно будет белым, тогда 1 - чёрным, 3 - белым, 13 и 6 — чёрными, 12 и 10 — белым, 4-чёрным, 5 — белым, 11 — чёрным, 14 — белым, 2 — чёрным, 6 — белым, 9 — чёрным. Все суммы использованы. Все числа покрашены хорошим образом. Научно выражаясь, соответствующий граф является деревом на 14 вершинах, с висячими 8,9,10 и 14 и единственной вершиной степени 3 — 3. Выпишем разбиение отдельно: {8,3,10,12,5,14,6} и {1,6,13,4,11,2,9}.

Критерий. Невозможность разбиения при $n \ge 15$: 3 балла.

Разбиение для всех $n \le 14$: 4 балла.

Каждая задача оценивается в 7 баллов

10 класс

10.1. Из пунктов A и B не одновременно выехали друг навстречу другу автомобилист и велосипедист. Встретившись в точке C, они тотчас развернулись и поехали обратно с теми же скоростями. Доехав до своих пунктов A и B, они снова развернулись, поехали и встретились второй раз в точке D. Здесь они вновь развернулись и так далее. В какой точке отрезка AB произойдёт их 2015-ая встреча?

Ответ. В точке C**.**

Решение. Обозначим скорости автомобилист и велосипедиста за x и y соответственно. Пусть автомобилист выехал раньше велосипедиста на t часов и к моменту выезда велосипедиста находился в точке P на расстоянии xt от A. После встречи в C и разворота, когда велосипедист вернулся в B, автомобилист вернулся в P, а затем доехал до A, к тому времени велосипедист развернулся и оказался в точке T на расстоянии yt от B. Затем они поехали вперёд, встретились в D, развернулись, велосипедист вернулся в T, автомобилист в A. Далее велосипедист, проехав yt км, вернулся в B, а автомобилист развернулся и за то же время, проехав xt км снова оказался в P. Цикл замкнулся, они снова в тех же положениях, что и спустя t часов после старта. Так они и будут по чётным номерам встречаться в C, а по нечётным – в D.

Критерий. Только ответ: 0 баллов.

10.2. Найти все значения параметров a,b,c, при которых система уравнений $\begin{cases} ax + by = c, \\ bx + cy = a, \\ cx + ay = b, \end{cases}$ имеет хотя бы одно отрицательное решение (когда $x, y < 0$)..

Ответ. При $a + b + c = 0$**.**

Решение. Допустим противное, что $a + b + c \ne 0$ и система имеет отрицательное решение. Сложим все уравнения: $(a + b + c)(x + y) = a + b + c$ и поделим на $a + b + c \ne 0$, получим

$x+y=1$, что невозможно для $x,y<0$. Следовательно, условие $a+b+c=0$ - необходимо. Если же оно выполнено, то, как легко убедиться, $x=y=-1$ - искомое отрицательное решение системы.
Критерий. Необходимость условия $a+b+c=0$: 4 балла.
Достаточность его: 3 балла.

10.3. В равностороннем треугольнике *ABC* на сторонах *AB* и *AC* взяты точки *P* и *Q* соответственно такие, что *AP:PB=CQ:QA=2*. Пусть *O* – точка пересечения отрезков *CP* и *BQ*, доказать, что угол *AOC* – прямой.
Доказательство. Треугольники *APC* и *CQB* равны по двум сторонам *AP=CQ, AC=CB* и углу 60 градусов между ними. Следовательно, угол APC равен углу *CQB,* поэтому сумма углов *APO* и *AQO* равна 180 градусов, значит, четырёхугольник *APOQ* — вписанный. Отсюда углы *AOP* и *AQP* равны, как опирающиеся на одну дугу. С другой стороны, если опустить высоту *BH*, то точка *Q* делит отрезок *AH* в отношении A*Q:QH*=2=*AP:PB.* По теореме Фалеса, *PQ* параллелен *BH* и перпендикулярен *AC.* Следовательно, углы *AQP , AOP* и *AOC* — прямые.
Критерий. Равенство треугольников *APC* и *CQB:* 1 балл.
Показано, что четырёхугольник *APOQ* — вписанный: 2 балла.
Показано, что *PQ* параллелен *BH* и перпендикулярен *AC*: 2 балла.
Показано, что углы *AOP* и *AQP* равны: 2 балла.

10.4. 25 различных натуральных чисел, не превосходящих 1000 таковы, что произведение любых двух из них является квадратом некоторого натурального числа. Доказать, что и сами числа являются квадратами натуральных чисел.
Доказательство. Будем рассматривать примарные разложения данных чисел — в произведения степеней различных простых множителей. Число является квадратом тогда и только тогда, когда все показатели степеней входящих в него простых чисел являются чётными. Все попарные произведения будут квадратами тогда и только тогда, когда, если какой-то простой делитель входит в некоторое число в нечётной степени, то он входит во все числа в нечётной степени. Если бы такие простые делители нашлись, поделив каждое число на произведение всех таких делителей, мы получили бы 25 различных квадратов натуральных чисел, не превосходящих 1000. Наибольшее из полученных квадратов было бы не меньше $625=25^2$, и не могло быть получено из числа, не превосходящего 1000, делением на число, большее 1. Следовательно, таковой деления на самом деле не было и в исходные числа все простые делители входили только в чётных степенях. Значит, все исходные числа являются квадратами.
Критерий. Замечено, что если какой-то простой делитель входит в некоторое число в нечётной степени, то он входит во все числа в нечётной степени: 2 балла.
Идея деления на произведение всех таких делителей: 2 балла.
Оценка величины максимального числа: 3 балла.
10.5. Окружность разбита на 21 равную дугу двадцатью одной точкой, являющимися вершинами правильного 21- угольника, каждая вершина окрашена в один из трёх цветов, все три цвета присутствуют. Доказать, что всегда можно выбрать по одной вершине каждого цвета так, что образованный этими вершинами треугольник содержит центр окружности.
Доказательство. Далее под *хордой* будем подразумевать только хорду с концами в некоторых двух из наших вершин. Хорда разбивает окружность на две неравные дуги, которые будем называть *большей* и *меньшей* дугами данной хорды соответственно. *Длиной хорды* будем считать длину минимальной дуги этой хорды в единичных дугах. Длины хорд могут равняться одному из чисел от 1 до 10 включительно, хорды длины 1 можно считать сторонами нашего 21 — угольника. *Максимальной хордой* будем называть любую хорду длины 10. *Острым треугольником* назовём равнобедренный треугольник с вершинами в наших точках, две из сторон которого являются максимальными хордами, а третья — стороной многоугольника. Заметим следующее.

1) Треугольник, одна из сторон которого является максимальной хордой, а третья вершина лежит на большей её дуге, всегда содержит центр окружности.
2) Острый треугольник всегда содержит центр окружности.
Считаем точки — вершины 21-угольника окрашенным в синий, красный и зелёный цвета. Назовём треугольник с вершинами в них $к$ — цветным, если его вершины окрашены в $к$ цветов. Если существует острый треугольник с вершинами трёх цветов — они и будут искомыми.
Далее все острые треугольники считаем не более, чем двухцветными. Строим на двух соседних вершинах разного цвета A и B острый двухцветный треугольник ABC, считаем левую вершину его основания A — красной, правую вершину основания B и острую вершину C — синими. Если на меньшей дуге хорды BC есть зелёная вершина D, то, как было замечено в 1), ACD будет трёхцветным треугольником, содержащим центр окружности.
Далее считаем, что меньшая дуга хорды BC содержит только красные и синие точки. Возьмём на меньшей дуге хорды AC зелёную точку E и проведём из неё максимальную хорду EF так, чтобы точки A,B и центр окружности лежали от неё с одной стороны. Если F - красная, то искомым будет треугольник BEF, если синяя - то треугольник AEF.
Критерий. Замечания о свойствах максимальных хорд и острых треугольников: 2 балла.
Случай когда на меньшей дуге хорды BC есть зелёная вершина: 2 балла.
Случай, когда меньшая дуга хорды BC содержит только красные и синие точки: 3 балла.

Каждая задача оценивается в 7 баллов

11 класс

11.1. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 40 км, в 4 часа утра вышел пешеход, а в 7-20 утра выехал велосипедист, который догнал пешехода точно посредине между A и B, после чего оба продолжили движение. Из B в A в 8-30 выехал второй велосипедист с той же скоростью, что и первый, который встретился с пешеходом спустя час после встречи пешехода с первым велосипедистом. Найти скорости пешехода и велосипедистов.
Ответ. 5 км в час и 30 км в час.
Решение. Обозначим скорости пешехода и велосипедистов за x и y км в час соответственно. К 7-20 утра пешеход прошёл $\frac{10}{3}\cdot x$ км, после чего за ним выехал велосипедист, который догонял его $\frac{10x}{3(y-x)}$ часов, в течение которых он шёл со скоростью x км в час и догнал в 20 км от A, откуда $\frac{10x}{3}+\frac{10x}{3(y-x)}\cdot x=20$. Преобразовав, получим $xy=6(y-x)$. С другой стороны, встреча со вторым велосипедистом произошла через $\frac{10}{3}+\frac{10x}{3(y-x)}+1$ часов после 4-00 утра, что должно равняться $\frac{9}{2}+\frac{40-\frac{9}{2}x}{x+y}$ - сумме 4,5 часов и времени, за которое пешеход и второй велосипедист, двигаясь навстречу, преодолеют расстояние, оставшееся между ними к 8-30 утра. Отсюда, преобразовав, получим $\frac{9y+80}{2(x+y)}=\frac{13y-3x}{3(y-x)}$, откуда $27y^2-27xy+240(y-x)=26y^2+20xy-6x^2$. Заменив $40xy=240(y-x)$, получим $y^2-7xy+6x^2=0$, откуда с учётом $y>x$ получим $y=6x$. Подставим это в равенство $xy=6(y-x)$, имеем $x=5, y=30$.
Критерий. Ответ с проверкой: 1 балл.
Правильные формулы: 3 балла.

11.2. На сторонах AB и AC равностороннего треугольника ABC со стороной 10 взяты точки P и Q соответственно такие, что отрезок PQ касается вписанной в треугольник окружности и его длина равна 4. Найти площадь треугольника APQ.

Ответ. $\frac{5}{\sqrt{3}}$.

Решение. Обозначим длины отрезков AP и AQ соответственно за x и y, точку касания отрезка PQ и вписанной в треугольник окружности за S, точки касания AB и AC со вписанной окружностью — за R и T. По теореме косинусов для треугольника APQ имеем: $x^2+y^2-xy=16$. С другой стороны, из-за равенства отрезков касательных $PR=PS, QT=QS$, $x+y=AP+AQ=AR-PR+AT-QT=AR+AT-(PS+QS)=10-4=6$. Возводим равенство $x+y=6$ в квадрат, получим $x^2+y^2+2xy=36$, вычтем из него $x^2+y^2-xy=16$, имеем $xy=\frac{20}{3}$. Тогда $S_{APQ}=\frac{1}{2}xy\sin 60=\frac{1}{2}\frac{20}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5}{\sqrt{3}}$.

Критерий. Теорема косинусов для треугольника APQ: 1 балл.

Сумма AP и AQ равна 6: 3 балла. Площадь через $xy=\frac{20}{3}$ - 3 балла.

11.3. Найдите множество, образуемое решениями систем уравнений $\begin{cases} ax+y=2a+3, \\ x-ay=a+4, \end{cases}$ при всевозможных значениях параметра a.(Для каждого значениях a находится решение (x,y) данной системы и все эти решения вместе составляют искомое множество точек на координатной плоскости.)

Ответ. Окружность с центром (3,1) радиуса $\sqrt{5}$ с выколотой точкой (2,-1).

Решение. Рассмотрим произвольное решение (x,y) данной системы. Если $x\neq 2$, выразим из первого уравнения a через x,y : $a=\frac{y-3}{2-x}$. Аналогично, если $y\neq -1$, выразим из второго уравнения a через x,y: $a=\frac{x-4}{y+1}$. Приравняв эти выражения, после преобразований получим $(x-3)^2+(y-1)^2=5$, что и является уравнением окружности с центром (3,1) радиуса $\sqrt{5}$. Следовательно, все решения системы лежат на этой окружности. С другой стороны, для любой точки (x,y) этой окружности, у которой $x\neq 2$ и $y\neq -1$, можно записать уравнение окружности в эквивалентном виде $\frac{y-3}{2-x}=\frac{x-4}{y+1}$, взять a равным значению этого отношения. Далее остаётся переписать равенства $\frac{y-3}{2-x}=a, \frac{x-4}{y+1}=a$ равносильно в исходную систему и убедиться, что данная пара x,y является её решением. Разберёмся с оставшимися случаями. Если $x=2, y\neq -1$, то из первого уравнения $y=3$ при любом a, а из второго $a=-\frac{1}{2}$ - при таком a пара (2,3) будет решением системы. $x\neq 2, y=-1$, то из второго уравнения $x=4$ при любом a, а из первого $a=2$ - при таком a пара (4,-1) будет решением системы. Обе этих точки лежат на окружности. Из этих же рассуждений следует, что последняя оставшаяся точка (2,-1) не может быть решением системы ни при каком a.

Критерий. Уравнение окружности: 3 балла.

Показано, что все, кроме трёх точек окружности, являются решениями: 4 балла.

Не выколота точка (2,-1) – минус 2 балла.

Выколоты лишние точки – минус балл за каждую.

11.4. Докажите, что в любой компании из 13 человек либо найдётся человек, знающий четырёх других, либо найдутся четверо, попарно не знакомых. Знакомства обоюдны — если А знает Б, то и Б знает А.

Доказательство. Допустим, что каждый в компании знает не более 3 других. Рассмотрим любого человека из компании, назовём его А, у него не более 3 знакомых, значит, после удаления из компании А и его знакомых останется не менее 9 человек. Возьмём любого из них, скажем, Б. После удаления из компании Б и его знакомых останется не менее 5 человек. Возьмём любого из них, скажем, В. После удаления из компании В и его знакомых останется хотя бы один человек. Выберем одного из последних оставшихся и назовём его Г. По выбору А,Б,В и Г — искомая четвёрка попарно незнакомых членов компании.

11.5. Найти все решения в натуральных числах уравнения: $2^x + 3^y = z^2$ **.**

Ответ. $x = 4, y = 2, z = 5$**.**

Решение. 1) Степень двойки не делится на 3, поэтому левая часть уравнения не делится на 3, следовательно, z^2 и z не делятся на 3. Поэтому остаток от деления правой части уравнения на 3 равен 1.

2) Рассмотрим левую часть по модулю 3, она равна $(-1)^x$ и по 1) сравнима с 1. Следовательно, $x = 2x_1, x_1 \geq 1$ - чётный.

3) Тогда $3^y = z^2 - 2^{2x_1} = (z - 2^{x_1})(z + 2^{x_1})$, откуда $z + 2^{x_1} = 3^a$ и $z - 2^{x_1} = 3^b$ для некоторых неотрицательных целых чисел a,b таких, что $a+b=y$. Вычитая второе из первого, получим $2^{x_1+1} = 3^a - 3^b = 3^b(3^{a-b} - 1)$, откуда $b = 0$, потому, что степень двойки не делится на 3.

4) Разложим $2^{x_1+1} = 3^a - 1 = (3-1)(3^{a-1} + \ldots + 3^1 + 1)$, откуда $2^{x_1} = 3^{a-1} + \ldots + 3^1 + 1$. Справа a нечётных слагаемых, слева — чётное число $2^{x_1}, x_1 \geq 1$? следовательно, $a = 2a_1$ - чётно.

5) Теперь $2^{x_1+1} = 3^{2a_1} - 1 = (3^{a_1} - 1)(3^{a_1} + 1)$ и числа $3^{a_1} - 1$ и $3^{a_1} + 1$ являются (аналогично п.3)) степенями двойки, различающимися на 2. Вычитая их друг из друга, получим, что меньшая из них равна 2, а большая 4. Следовательно, $2^{x_1+1} = 2 \cdot 4 = 8$, откуда $x_1 = 2, x = 2x_1 = 4$. Из п.4 имеем $3^a - 1 = 2^{x_1+1} = 8$, поэтому $y = a = 2$ и $z = 5$.

Критерий. Только ответ: 1 балл.

Чётность $x = 2x_1, x_1 \geq 1$: 2 балла.

Чётность $a = 2a_1$: 2 балла.