

Всесибирская олимпиада школьников 2012-2013 г. по математике
Первый этап
10 класс

Время выполнения задания 4 астрономических часа

Каждая задача оценивается в 7 баллов

10.1. В воду два раза добавляли соль, причём так, что прирост массы раствора в процентах во второй раз был таким же, как и в первый раз. Какова была начальная масса воды и каков был прирост массы раствора каждый раз, если конечная масса раствора была равна 850 г, а конечная концентрация составила 36%?

10.2. Доказать, что для любого $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ выполнено неравенство: $1 + \operatorname{tg} x < \frac{1}{1 - \sin x}$.

10.3. Найти все точки плоскости, координаты x, y которых удовлетворяют уравнению:
 $\max \{ |x + y|, |x - y| \} = 1$.

10.4. На прямой l отмечены две различные точки A и B . Рассматриваются всевозможные пары окружностей, касающихся друг друга и прямой l в точках A и B соответственно. Для каждой пары через M обозначим середину отрезка внешней касательной к этим окружностям, не лежащей на l . Найти геометрическое место точек M .

10.5. По кругу в некотором порядке записаны все натуральные числа от 1 до 100. Для каждой пары соседних чисел подсчитана сумма. Из ста полученных чисел какое максимальное количество может делиться на 7?