9 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

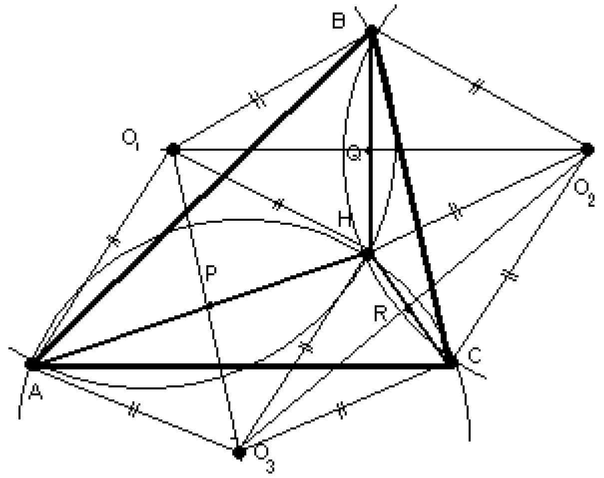
9.1. Какие две цифры нужно дописать справа к числу 2013, чтобы полученное шестизначное число делилось на 101? Найти все возможные варианты ответа.
Ответ. 94 полученное число будет равно 201394.
Решение. Остаток от деления числа $\overline{2013xy}$ на 101 равен $\overline{xy}$ ’ и это должно делиться на 101. Это больше 0, но меньше 202, поэтому
$\overline{xy}$ ’ 01, $\overline{xy}$)4, x), y 1.
Оценивание. Просто ответ с проверкой: 1 балл. Необоснование $\overline{xy}$ ’ 01 - минус балл.

9.2. Найти максимальное нечётное натуральное число, которое нельзя представить в виде суммы трёх различных составных чисел.
Ответ. 17.
Решение. Нечётное число даёт при делении на 4 остатки 1 или 3. В первом случае искомое представление имеет вид $n = 4k + 1 = 4(k - 4) + 8 + 9, k \geq 5, n \geq 21$, во втором - $n = 4k + 3 = 4(k - 3) + 6 + 9, k \geq 4, n \geq 19$. С другой стороны, тремя наименьшими составными числами являются 4,6,8, сумма которых равна 18,

поэтому число 17 представить в требуемом виде нельзя. Оно и является ответом задачи.

Оценивание. Просто ответ с проверкой: 0 баллов. Необоснование непредставимости 17 в искомом виде - минус 2 балла.

9.3. В остроугольном треугольнике *ABC* выбрана точка *H* такая, что радиусы описанных окружностей треугольников *AHB*, *BHC* и *CHA* равны. Доказать, что *H* является точкой пересечения высот треугольника *ABC*.



Решение. Обозначим середины отрезков *AH, BH* и *CH* через *P,Q* и *R* соответственно, а центры описанных окружностей треугольников *AHB, BHC* и *CHA* через O_1, O_2, O_3 соответственно. Из условия следует, что четырёхугольники $AO_1HO_3, BO_2HO_1, CO_3HO_2$ являются ромбами, поэтому точки *P,Q* и *R* являются серединами отрезков *AH, BH* и *CH,* а отрезки, соединяющие центры окружностей, им соответственно перпендикулярны и тоже делятся ими пополам. Тогда отрезок *PQ,* например, является одновременно средней линией в треугольниках *AHB* и $O_1O_2O_3$, следовательно, сторона *AB* и отрезок O_2O_3 равны и параллельны. В ромбе CO_3HO_2 диагональ *HC* перпендикулярна диагонали O_2O_3, следовательно, *HC* перпендикулярна стороне треугольника *AB.* Последнее означает, что *H* лежит на высоте треугольника, опущенной из вершины *C.* Аналогично доказывается, что *H* лежит и на остальных высотах, то есть является их точкой пересечения, именуемой в народе ортоцентром.

Оценивание. Доказательство в «обратную сторону» хорошо известного факта, что если H – ортоцентр, то радиусы описанных окружностей равны: 1 балл.

9.4. Доказать, что, если $x^2+xy+xz<0$, то $y^2>4xz$.

Решение. Представим исходное неравенство в виде $x(x+y+z)<0$.

1) В случае $x<0$, имеем $x+y+z>0$ и $y>-x-z$. Если $-x-z<0$, то $x+z>0$, следовательно, $z>0$, значит $y^2\ge 0>4xz$. Если $-x-z\ge 0$, то
$y^2>(-x-z)^2=x^2+z^2+2xz\ge 2|x||z|+2xz\ge 4xz$.

2) В случае $x>0$, имеем $x+y+z<0$ и $y+z<-x<0$. Если при этом $z<0$, то $y^2\ge 0>4xz$. Если же $z\ge 0$, то $y<-x-z<0$, и $-y>x+z>0$, поэтому
$y^2>(x+z)^2\ge 4xz$.

Оценивание. В каждом переходе нужно тщательно следить, как школьник работает со знаками сторон неравенства. При возведении их в квадрат без проверок – оценка не выше 4 баллов. Если таких мест более одного – оценка не выше 1 балла.

9.5. В клетках доски 8 на 8 расставлены фишки так, что для каждой фишки горизонталь либо вертикаль доски, в которых она лежит, содержит всего не более трёх фишек. Каково максимально возможное количество фишек на доске?

Ответ. 30.

Решение. Переставив вертикали и горизонтали местами, считаем, что только левые x вертикалей и нижние y горизонталей содержат больше, чем по 3 фишки. Из условия следует, что в левом нижнем прямоугольнике на пересечении этих вертикалей и горизонталей фишек нет вообще. Каждая вертикаль, проходящая через фишки в этих горизонталях, содержит не более трёх фишек, и каждая горизонталь, проходящая через фишки в этих вертикалях, содержит не более трёх фишек. Тогда общее количество фишек на доске не превосходит $3(8-x)+3(8-y)=48-3(x+y)$, что не превосходит 30 при $x+y\geq 6$.

Пусть далее $x+y\leq 5$ и $x\leq y$, тогда $x\leq 2$. Оценим сверху общее количество фишек на доске, как $3(8-x)+x(8-y)=24+5x-xy$. При $x=2$ это не больше 30, при $x=1, x=0$ - не больше 29 и 24 соответственно.

Пример расстановки 30 фишек: заполнены все клетки трёх левых вертикалей и трёх нижних горизонталей, кроме левого нижнего квадрата 3 на 3 клетки.

Оценивание. Оценка 5 баллов. Пример 2 балла. Любая неверная оценка с любыми рассуждениями – 0 баллов.