Решения заданий второго этапа Всесибирской олимпиады школьников 2012-2013 г.г. по математике

9 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

9.1. Какие натуральные числа можно представить в виде дроби $\frac{x^2}{y^3}$, где x и y - некоторые натуральные числа?

Ответ. Любое натуральное число.

Решение. Пусть n - произвольное натуральное число. Положим $x = n^2$, $y = n$, тогда $\frac{x^2}{y^3} = \frac{n^4}{n^3} = n$.

9.2. Решить систему уравнений в действительных числах: $\begin{cases} x^2 = 4y^2 + 19, \\ xy + 2y^2 = 18. \end{cases}$

Ответ. $(x, y) = \pm(\frac{55}{\sqrt{91}}, \frac{18}{\sqrt{91}})$.

Решение. Разложим оба уравнения на множители: $\begin{cases} (x - 2y)(x + 2y) = 19, \\ y(x + 2y) = 18. \end{cases}$

Поскольку $x + 2y \neq 0$, разделив одно на другое, получаем: $18x = 55y, y = \frac{18}{55}x$, подставив во второе уравнение, находим: $\frac{18}{55}x \cdot \frac{91}{55}x = 18, x = \pm\frac{55}{\sqrt{91}}$ и $y = \pm\frac{18}{\sqrt{91}}$.

9.3. В треугольнике *ABC* величина угла *A* равна 30 градусов, а длина медианы, проведённой из вершины *B*, равна длине высоты, проведённой из вершины *C*. Найти величины углов *B* и *C*.

Ответ. $\angle B = 90^\circ, \angle C = 60^\circ$.

Решение. Ввиду того, что $\angle A = 30^\circ$, высота, проведённая из вершины *C*, равна половине *AC*, следовательно, медиана, проведённая из вершины *B*, равна половине *AC*. Отсюда сразу вытекает, что вершина *B* лежит на окружности с диаметром *AC*, следовательно, $\angle B = 90^\circ, \angle C = 90^\circ \quad 0^\circ = 60^\circ$.

9.4. Доказать, что из любых 18 последовательных трёхзначных чисел всегда можно выбрать число, делящееся нацело на сумму своих цифр. Привести пример 17 последовательных трёхзначных чисел, ни одно из которых не делится на сумму своих цифр.

Решение. Среди 18 последовательных трёхзначных чисел всегда есть ровно два числа, делящихся на 9, их разность равна 9, поэтому одно из них обязательно чётно, значит, делится на 18. С другой стороны, сумма цифр трёхзначного числа, отличного от 999, не превосходит 26. Следовательно, сумма цифр чётного трёхзначного числа, делящегося на 9, может равняться 9 или 18. Следовательно, чётное трёхзначное число, делящееся на 9, делится на сумму своих цифр.

Пример. 973,…,989.

9.5. По кругу выписаны 100 чисел с суммой 100. Сумма любых 6 идущих подряд чисел не превосходит 6. Одно из записанных чисел равно 6. Найдите остальные числа.

Ответ. Считая первым упомянутое в условии число 6, все числа с нечётными номерами равны 6, а все числа с чётными номерами равны -4.

Решение. Обозначим по порядку выписанные числа за $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$. Сложим все 100 неравенств $a_i + a_{i+1} + \ldots + a_{i+5} \le 6, i = 1, 2, \ldots, 100$, получим $6 \cdot 100 = 6(a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}) \le 100 \cdot 6 = 600$. Отсюда следует, что все неравенства являются, на самом деле, равенствами. Из равенств $a_i + a_{i+1} + \ldots + a_{i+5} = 6 = a_{i+1} + a_{i+1} + \ldots + a_{i+6}$ следует, что $a_i = a_{i+6}, i = 1, \ldots, 100$, значит, между собой равны все числа с нечётными номерами, и все числа с чётными номерами. Можно считать, что все числа с нечётными номерами равны 6, тогда их сумма равна 300, значит, сумма всех чисел с чётными номерами равна –200. Следовательно, все числа с чётными номерами равны –4.