9 класс

9.1. Из двух городов, расстояние между которыми 105 км, вышли одновременно навстречу друг другу с постоянными скоростями два пешехода и встретились через 7,5 часов. Определить скорость каждого из них, зная, что, если бы первый шёл в 1,5 раза скорее, а второй в 2 раза медленнее, то они бы встретились через $8\frac{1}{13}$ часа.

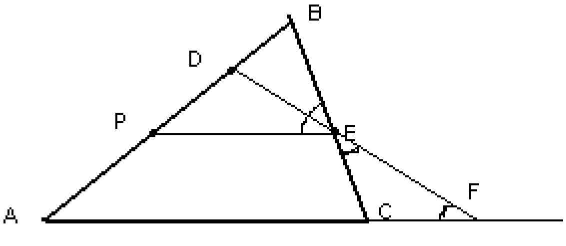
Ответ. 6 и 8 км в час.

Решение. Обозначим скорости их за x и y км в час соответственно. Из условия получаем: $\frac{15}{2}(x+y)=105, \frac{105}{13}\left(\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}y\right)=105$, откуда $x=6, y=8$.

9.2. На доске записаны несколько последовательных натуральных чисел. Известно, что 48% из них чётны, а 36% из них меньше 30. Найти наименьшее из выписанных чисел.
Ответ. 21.

Решение. $\frac{48}{100}=\frac{12}{25}, \frac{36}{100}=\frac{9}{25}$ **-** несократимые дроби**,** поэтому общее количество чисел делится на 25. Если бы их было 50 или более, то, по условию, чётных было бы минимум на 2 меньше, чем нечётных, что невозможно для идущих подряд натуральных чисел. Следовательно, их 25, и ровно 9 из них меньше 30. Значит, первое из них равно 21.

9.3. На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены точки D и E соответственно такие, что $\angle ACB = 2\angle BED$. Доказать, что $AC+EC>AD$.



Доказательство. Продолжим DE до пересечения с продолжением стороны AC, и PE параллельно стороне AC . Тогда угол CFE равен углу PED, а PED равен углу BED по условию. Следовательно, угол CFE равен углу FEC и CE = CF, AC+CE=AF. В треугольнике DEP угол PDE больше угла DEP, потому, что он равен сумме BED=DEP и EBD, как внешний угол в треугольнике BDE. Следовательно, и угол ADF больше угла AFD, значит отрезок AF, лежащий против большего угла ADF, больше отрезка AD, лежащего против меньшего угла AFD.

9.4. Назовём натуральное число *подходящим*, если оно минимальное среди всех натуральных чисел с такой же, как у него, суммой цифр. Найти все подходящие числа, являющиеся точными квадратами натуральных чисел.
Ответ. 1, 4, 9, 49.

Решение. В любом подходящем числе все цифры, кроме первой, равны 9. В противном случае, перекинув единицу из старшего разряда в тот, где не 9, получим меньшее число с той же суммой цифр (возможно, с меньшим числом цифр). Все однозначные числа подходящие, поэтому 1,4,9 удовлетворяют условию. Далее, если квадрат числа оканчивается на 9, то само оно оканчивается на 3, или на 7. Если предпоследняя цифра числа равна a, то предпоследняя цифра квадрата будет $6a$ или $4a+4$ - чётной. Следовательно, само число будет двузначным. Из них подходит только 49.

9.5. На клетчатой доске размера 10 на 10 отмечено несколько клеток так, что каждый квадрат 3 на 3 клетки содержит ровно одну отмеченную клетку. Какое количество клеток может быть отмечено?

Ответ. Любое от 9 до 16.

Решение. Разобьём доску 3-ей, 6-ой и 9-ой горизонтальными линиями и 3-ей, 6-ой и 9-ой вертикальными линиями на девять квадратов 3 на 3 слева снизу, три вертикальных полоски 1 на 3 в крайнем правом столбце, три горизонтальных полоски в верхней строке и верхнюю правую угловую клетку. В каждом из квадратов 3 на 3 должна быть одна отмеченная клетка, поэтому всего их не меньше 9. С другой стороны, каждый из 16 элементов разбиения может быть накрыт одним квадратом 3 на 3, поэтому не может содержать больше одной отмеченной клетки, следовательно, их не больше 16.

Построим примеры для каждого количества клеток. Выделим 3-ий, 6-ой и 9-ый столбики. Каждый квадрат 3 на 3 на доске пересекается ровно с одним из выделенных столбиков по полоске 3 на 1 клетку. Следовательно, если отметить в этих столбиках каждую третью, начиная с некоторой, клетку, получим искомый пример. Если начинать с первой, в столбике будет четыре отмеченных клетки, если со второй или третьей — то по три. Варьируя выбор в столбиках, получим все количества отмеченных клеток от 9 до 12. Теперь выберем 1-ый, 4-ый, 7-ой и 10-ый столбики и сделаем в них то же самое. Получим все количества выбранных клеток от 12 до 16.