8 класс

8.1 Роман хочет купить футбольный клуб, яхту и небольшой особняк. Есть купить только футбольный клуб, то останется 2 миллиарда, если только яхту, то — 3 миллиарда, а если только особняк, то — 6 миллиардов. Сможет ли Роман купить клуб, яхту и особняк одновременно? Ответ обоснуйте.
Ответ: не сможет.
Решение: Пусть особняк стоит x миллиардов, тогда яхта стоит $x + 3$ миллиарда, а клуб — $x + 4$, всего же у Романа — $x + 6$ миллиардов. Сравним эту сумму с общей стоимостью клуба, яхты и особняка:

$$x + x + 3 + x + 4 > x + 6$$
$$3x + 7 > x + 6$$
$$2x + 1 > 0.$$

Итак, суммарная стоимость больше суммы, которой располагает Роман.
Критерии: Только ответ — 0 баллов.
Верно составленное неравенство — 2 балл.

8.2 Сергей расставил по кругу несколько (больше двух) попарно различных вещественных чисел так, что каждое число оказалось равно произведению своих соседей. Сколько чисел мог расставить Сергей?
Ответ: 6.
Решение: Обозначим два числа, стоящих рядом, за a и b. Тогда рядом с ними стоит b/a, дальше $1/a$, $1/b$, a/b и снова a. Таким образом, больше 6 чисел расставить нельзя.

Если можно расставить 3 числа, то $a = 1/a$, значит, a равно 1 или –1. В первом случае b и b/a совпадают. Во втором случае получаем тройку: $–1$, b, $–b$, в которой $–1 = b * (–b)$, значит это тройка –1, 1, –1.

Если можно расставить 4 числа, то $a = 1/b$, получается четверка чисел a, $1/a$, $1/a^2$, $1/a$. Есть повторяющиеся числа.

Если можно расставить 5 чисел, то $a = a/b$, то есть $b = 1$. Получается пятерка чисел a, 1, $1/a$, $1/a$, 1. Есть повторяющиеся числа.

И наконец, 6 чисел расставить можно: 2, 3, 3/2, 1/2, 1/3, 2/3.
Критерии: Доказано, что чисел не больше 6 — 3 балла.
За рассмотрение каждого из случаев — по одному баллу.

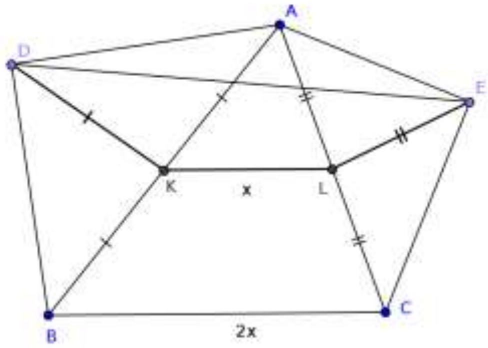
8.3 Имеется двадцать одинаковых на вид монет, одна из них весит 9,9 г, две другие — по 9,8 г, а все оставшиеся — по 10 г. Можно ли за два взвешивания на чашечных весах без гирь выявить хотя бы одну десятиграммовую монету?

Ответ: можно.
Решение: Обозначим монеты числами от 1 до 20. Взвесим монеты 1, 2 с монетами 3 и 4. Среди этих четырех монет есть хотя бы одна настоящая.

В случае равенства, на каждой чаше либо две настоящих монеты, либо по одной настоящей и по одной в 9,8 г. Эти случаи разделим вторым взвешиванием: взвесим 1 и 2 монету.

Если при первом взвешивании одна из чаш перевесила, то в более тяжелой чаше есть настоящая монета. Взвесим между собой две монеты с более тяжелой чаши. В случае равенства — обе настоящие, в случае неравенства — выберем более тяжелую монету.
Критерии: Неверный алгоритм или упущение более одного случая — 0 баллов.
Упущен один случай — не более 3 баллов.
Только алгоритм взвешивания без обоснования — не менее 5 баллов.

8.4 Даны треугольник ABC и такие точки D и E, что углы ADB и CEB прямые. Докажите, что длина отрезка DE не больше полупериметра треугольника ABC.
Решение: Отметим середины AB и BC — точки K и L. Заметим, что треугольники ADB и CEB прямоугольные, значит, медианы в них равны половине гипотенузы: $DK = AB/2$, $EL = CB/2$. Кроме того, $KL = AC/2$ как средняя линия. Отсюда получаем, что $DE \leq DK + KL + LE = AB/2 + AC/2 + CB/2 = P_{ABC}/2$.



Критерии: выполнено верное доп. построение — не менее 2 баллов.
В решении существенно используется расположение точек D и E — снять 2 балла.

8.5 Миссис Хадсон и Доктор Ватсон загадали по натуральному числу. Каждый из них посчитал сумму всех делителей своего числа (включая 1 и само число) и сумму чисел, обратных к делителям. Когда Шерлок Холмс узнал, что и первые, и вторые суммы его друзей совпали, он сразу догадался, что миссис Хадсон и доктор Ватсон загадали одно и то же число. Докажите, что Шерлок Холмс прав.
Решение: Пусть миссис Хадсон загадала число n. Докажем, что первая сумма миссис Хадсон в n раз больше второй. Пусть a — делитель n, который входит в первую сумму. Тогда во вторую сумму входит слагаемое $1 / a$ соответственною После увеличения второй суммы в n раз, то слагаемое $1 / a$ станет равно n / a. С другой стороны, n / a — это тоже некоторый делитель числа n. Значит, после увеличения в n раз, вторая сумма тоже будет представлять из себя сумму делителей числа (но в другом порядке). Несложно убедится в том, что в увеличенной сумме каждый делитель также встречается ровно один раз. Значит изначальные сумму отличались ровно в n раз. Утверждение доказано.

Как было доказано, число, загаданное каждым из персонажей, равно частному его первой суммы на вторую. Т.к. суммы у них совпадают, то совпадают и загаданные числа.
Критерии: условие переписано в алгебраическом виде — 0 баллов.
Недоказанное утверждение о том, что первая сумма отличается от второй ровно в n раз — 3 балла.
Верное решение, но не доказано взаимно-однозначное соответствие слагаемых первой суммы и второй — снять 1 балл.